Produit tensoriel, produit extérieur, applications

Georges Dloussky - Master 2 de Mathématiques Univ. d'Aix-Marseille - 2013-2014

8 Novembre 2013

Table des matières

Dans ce chapitre $\boldsymbol{A}$ **désigne un anneau commutatif**.
Le produit tensoriel transforme les applications multilinéaires en applications linéaires. Objet fondamental de l'algèbre, il intervient en analyse sur les variétés pour définir les formes différentielles, en géométrie différentielle pour définir les tenseurs. On introduit la notion d'extension des scalaires et de complexification utilisées en géométrie complexe, géométrie analytique et géométrie algébrique. La platitude a une interprétation géométrique en terme de dimension des fibres d'une application holomorphe.

1 Produit tensoriel de modules

1.1 Produit tensoriel d'espaces vectoriels

Comme introduction, on va commencer par construire le produit tensoriel de deux K-espaces vectoriels, nous passerons ensuite au cas général :

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur un corps K, munis respectivement de bases $(e_1, \ldots, e_m)$ et $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$. Si G est un K-espace vectoriel et $(g_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m,\\ 1\leq j\leq n}}$ est une famille d'éléments de G, il existe une unique application bilinéaire

$$f : E \times F \to G$$

telle que pour tout (i, j), $f(e_i, \epsilon_j) = g_{i,j}$, elle est définie par

$$f\Big(\sum_i a_i e_i, \sum_j b_j \epsilon_j\Big) = \sum_{i,j} a_i b_j f(e_i, \epsilon_j).$$

Soit T un K-espace vectoriel de dimension mn (par exemple E^n ou F^m), muni d'une base $\{t_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ et soit

$$\varphi : E \times F \to T$$

l'application bilinéaire, définie par $\varphi(e_i, \epsilon_j) = t_{i,j}$ pour tout (i, j). Alors (T, φ) a la propriété universelle suivante :
Pour tout espace vectoriel G et toute application **bilinéaire** $f : E \times F \to G$, il existe une unique application **linéaire** $\tilde{f} : T \to G$ telle qu'on ait le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
E \times F \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & G \\
& T \arrow[ur, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

i.e. $f = \tilde{f} \circ \varphi$. En effet, il suffit de définir $\tilde{f}$ en posant $\tilde{f}(t_{i,j}) = f(e_i, \epsilon_j)$. Il est clair que $\tilde{f}$ doit vérifier cette propriété pour que le diagramme commute, et l'unicité en découle. De la propriété universelle, on déduit l'unicité, à isomorphisme unique près du couple (T, φ) : en effet, si (T', φ') vérifie la même propriété, d'une part, puisque φ' est bilinéaire, on peut remplacer dans le diagramme G par T' et la propriété universelle de (T, φ) donne une unique application linéaire $\tilde{\varphi}' : T \to T'$. D'autre part, puisque φ est bilinéaire, la propriété universelle de (T', φ') donne une autre unique application linéaire $\tilde{\varphi} : T' \to T$. Maintenant, remarquons que $Id_T \circ \varphi = (\tilde{\varphi} \circ \tilde{\varphi}') \circ \varphi$. En appliquant la propriété universelle de (T, φ) à φ, on en déduit que $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\varphi}' = Id_T$. De même $\tilde{\varphi}' \circ \tilde{\varphi} = Id_{T'}$, donc $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\varphi}'$ sont les uniques isomorphismes cherchés. Le couple (T, φ) est le produit tensoriel de E et F. Cet argument d'unicité de la solution d'un problème universel est commun à tous les problèmes universels et ne sera donc pas répété dans la suite. La construction du produit tensoriel de deux espaces vectoriels se généralise facilement au cas d'un nombre fini de K-espaces vectoriels ou de A-modules libres. Lorsqu'on n'a plus de bases, on va donner une autre construction.

1.2 Construction générale

Soient $M_1, \ldots, M_n$, n A-modules, où $n \geq 2$. On pose $E = M_1 \times \cdots \times M_n$ et soit $P = A^{(E)}$. Pour tout $x \in E$, on note $[x]$ l'élément $(\delta_{x,y})_{y\in E} \in P$, de sorte que $\{[x] \mid x \in E\}$ constitue la base canonique du A-module P. Notons Q le sous-module de P engendré par les éléments de la forme suivante :

1. $[(m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i + m_i', m_{i+1}, \ldots, m_n)] - [(m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i, m_{i+1}, \ldots, m_n)] - [(m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i', m_{i+1}, \ldots, m_n)]$,
2. $[(m_1, \ldots, m_{i-1}, am_i, m_{i+1}, \ldots, m_n)] - a[(m_1, \ldots, m_i, \ldots, m_n)]$,

où $1 \leq i \leq n$ et $a \in A$.
On note $M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_n = M_1 \otimes \cdots \otimes M_n$ le A-module quotient P/Q et on appelle $M_1 \otimes \cdots \otimes M_n$ le **produit tensoriel** des modules $M_1, \ldots, M_n$. L'image de $[(m_1, \ldots, m_n)]$ par l'application de passage au quotient $P \to P/Q$ est notée $m_1 \otimes \cdots \otimes m_n$ et on appelle

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & M_1 \times \cdots \times M_n & \to & M_1 \otimes \cdots M_n \\ & (m_1, \ldots, m_n) & \mapsto & m_1 \otimes \cdots \otimes m_n \end{array}$$

l'application canonique de $M_1 \times \cdots \times M_n$ dans $M_1 \otimes \cdots \otimes M_n$. Un élément de $M_1 \otimes \cdots M_n$ est **décomposable** s'il est non nul et appartient à $\Phi(M_1 \times \cdots \times M_n)$, c'est-à-dire de la forme $m_1 \otimes \cdots \otimes m_n$.
Par construction, $\Phi(M_1 \times \cdots \times M_n)$ engendre $M_1 \otimes \cdots \otimes M_n$, donc tout élément de $M_1 \otimes \cdots \otimes M_n$ est somme d'éléments décomposables. On en déduit qu'une application linéaire d'un produit tensoriel $M_1 \otimes \cdots \otimes M_n$ dans un module N est entièrement déterminé par ses valeurs sur les éléments décomposables.
Par construction, on a pour tout $1 \leq i \leq n$, tout $(m_1, \ldots, m_n) \in M_1 \times \cdots \times M_n$, tout $m'_i \in M_i$, et tout $a \in A$ les propriétés suivantes :

1. $m_1 \otimes \cdots \otimes (m_i + m'_i) \otimes \cdots \otimes m_n = m_1 \otimes \cdots \otimes m_n + m_1 \otimes \cdots \otimes m'_i \otimes \cdots \otimes m_n$,
2. $m_1 \otimes \cdots \otimes am_i \otimes \cdots \otimes m_n = a\, m_1 \otimes \cdots \otimes m_i \otimes \cdots \otimes m_n$.

Ces deux propriétés expriment la n-linéarité de Φ. On obtient facilement

1. Pour tout A-module N, et toute application linéaire $f \in Hom(M_1 \otimes \cdots M_n, N)$, $f \circ \Phi$ est n-linéaire,
2. Si $(m_i)_{i \in I}$ et $(n_j)_{j \in J}$ sont des familles de générateur des A-modules M et N, alors $(m_i \otimes n_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est une famille génératrice de $M \otimes N$. En effet, si $m = \sum_i a_i m_i$ et $n = \sum_j b_j n_j$, on a $m \otimes n = \sum_{i,j} a_i b_j m_i \otimes n_j$.

Théorème 1. 1 (Propriété universelle du produit tensoriel) *Pour toute application n-linéaire $F : M_1 \times \cdots \times M_n \to N$, il existe une unique application linéaire $f : M_1 \otimes \cdots \otimes M_n \to N$ telle que le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} M_1 \times \cdots \times M_n \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\Phi"'] & & N \\ & M_1 \otimes \cdots \otimes M_n \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. De plus, $(M_1 \otimes \cdots \otimes M_n, \Phi)$ est unique à isomorphisme unique près.

Démonstration : Soit $F : M_1 \times \cdots \times M_n \to N$ une application n-linéaire. Posons $E = M_1 \times \cdots \times M_n$. Puisque $\{[m] \mid m \in E\}$ est une base de $P = A^{(E)}$, il existe une unique application linéaire $\hat{f} : P \to N$ telle que pour tout $m = (m_1, \ldots, m_n) \in E$, $\hat{f}([m]) = F(m)$. Par hypothèse, F est n-linéaire, donc $F(x) = 0$ pour tout $x \in Q$. On en déduit par passage au quotient une application linéaire $f : P/Q = M_1 \otimes \cdots \otimes M_n \to N$ telle que $\hat{f}([(m_1, \ldots, m_n)]) = f(m_1 \otimes \cdots m_n)$, d'où $F(m_1, \ldots, m_n) = f \circ \Phi(m_1, \ldots, m_n)$. $\square$

Corollaire 1. 2 *Soient $M_1, \ldots, M_n$ et N des A-modules. Alors, l'application n-linéaire canonique $\Phi : M_1 \times \cdots \times M_n \to M_1 \otimes \cdots \otimes M_n$ définit un isomorphisme de A-modules*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^n(M_1, \ldots, M_n; N) & \to & Hom(M_1 \otimes \cdots \otimes M_n, N) \\ F & \mapsto & f \end{array}$$

où f est l'unique application linéaire qui vérifie $F = f \circ \Phi$.

1.3 Propriétés

Proposition 1. 3 *Pour tout A-module M, l'application*

$$\begin{array}{rccc} \epsilon: & M & \to & A \otimes_A M \\ & x & \mapsto & 1 \otimes x \end{array}$$

est un isomorphisme.

Démonstration : L'application $A \times M \to M$ définie par $(a, x) \mapsto ax$ est bilinéaire. D'après (1) il existe une application linéaire $\eta : A \otimes M \to M$ telle que $\eta(a \otimes x) = ax$, d'où

$$\epsilon \circ \eta(a \otimes x) = 1 \otimes ax = a \otimes x, \quad \eta \circ \epsilon(x) = \eta(1 \otimes x) = x.$$

On en déduit que $\epsilon \circ \eta = Id_{A \otimes M}$ et que ϵ, η sont des applications linéaires réciproques. □

Proposition 1. 4 (Symétrie) *L'unique application linéaire*

$$\sigma : M_1 \otimes M_2 \to M_2 \otimes M_1$$

telle que pour tout $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$ on ait $\sigma(m_1 \otimes m_2) = m_2 \otimes m_1$, est un isomorphisme.

Démonstration : L'application $(m_1, m_2) \mapsto m_2 \otimes m_1$ est bilinéaire ; la propriété universelle du produit tensoriel donne donc une unique application linéaire σ. En considérant $(m_2, m_1) \mapsto m_1 \otimes m_2$, on obtient l'application réciproque. □

Proposition 1. 5 (Associativité) *Il existe une unique application linéaire*

$$f : (M_1 \otimes M_2) \otimes M_3 \to M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3), \quad \big(\text{resp. } g : (M_1 \otimes M_2) \otimes M_3 \to M_1 \otimes M_2 \otimes M_3\big)$$

telle que pour tout $(m_1, m_2, m_3) \in M_1 \times M_2 \times M_3$ on ait

$$f((m_1 \otimes m_2) \otimes m_3) = m_1 \otimes (m_2 \otimes m_3), \quad \big(\text{resp. } g((m_1 \otimes m_2) \otimes m_3) = m_1 \otimes m_2 \otimes m_3\big).$$

De plus, f et g sont des isomorphismes.

Dans un produit tensoriel, on peut donc supprimer les parenthèses et ces énoncés se généralisent (Cf Ex. 1.6 ci-dessous).
Démonstration : Soient $\Phi : M_1 \times M_2 \times M_3 \to (M_1 \otimes M_2) \otimes M_3$, $\Psi : M_1 \times M_2 \times M_3 \to M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3)$ et $\Theta : M_1 \times M_2 \times M_3 \to M_1 \otimes M_2 \otimes M_3$ les trois applications canoniques. Pour voir les isomorphismes voulus, il suffit de montrer que $((M_1 \otimes M_2) \otimes M_3, \Phi)$ et $(M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3), \Psi)$ vérifient la propriété universelle de $(M_1 \otimes M_2 \otimes M_3, \Theta)$. Soit $\varphi : M_1 \times M_2 \times M_3 \to N$ une application trilinéaire. Considérons, par exemple, $(M_1 \otimes M_2) \otimes M_3$: Pour tout $m_3 \in M_3$, l'application

$$M_1 \times M_2 \to N, \quad (m_1, m_2) \mapsto \varphi(m_1, m_2, m_3),$$

est bilinéaire. On en déduit donc une application

$$\varphi' : (M_1 \otimes M_2) \times M_3 \to N$$

telle que

$$\varphi'(m_1 \otimes m_2, m_3) = \varphi(m_1, m_2, m_3).$$

Comme φ' est bilinéaire, il existe $\phi : (M_1 \otimes M_2) \otimes M_3 \to N$ telle que

$$\phi((m_1 \otimes m_2) \otimes m_3) = \varphi(m_1, m_2, m_3).$$

□

Exercice 1. 6 Soit $p \in \{1, \dots, n-1\}$. Montrer qu'il existe un unique isomorphisme

$$f : (M_1 \otimes \cdots \otimes M_p) \otimes (M_{p+1} \otimes \cdots \otimes M_n) \to M_1 \otimes \cdots \otimes M_n,$$

tel que pour tout $m_1, \dots, m_n) \in M_1 \times \cdots \times M_n$, on ait

$$f\big((m_1 \otimes \cdots \otimes m_p) \otimes (m_{p+1} \otimes \cdots \otimes m_n)\big) = m_1 \otimes \cdots \otimes m_n.$$

Proposition 1. 7 (Fonctorialité) *Soient $u' : M' \to M$ et $v' : N' \to N$ des applications linéaires. Alors, il existe une unique application linéaire notée*

$$u' \otimes v' : M' \otimes N' \to M \otimes N$$

telle que $u' \otimes v'(m' \otimes n') = u'(m') \otimes v'(n')$.
Si, de plus, on a des applications linéaires $u : M \to M''$ et $v : N \to N''$, alors

$$(u \otimes v) \circ (u' \otimes v') = (u \circ u') \otimes (v \circ v').$$

Démonstration : L'application $(m', n') \mapsto u'(m') \otimes v'(n')$ est bilinéaire. La règle de composition se teste sur un élément décomposable et dans ce cas, elle est évidente. $\square$

Exercice 1. 8 Soient $u_i : M_i \to N_i$, $i = 1, \dots, n$ des applications linéaires. Montrer qu'il existe une unique application linéaire

$$u : M_1 \otimes \cdots \otimes M_n \to N_1 \otimes \cdots \otimes N_n$$

telle que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in M_1 \times \cdots \times M_n$ on ait $u(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = u_1(x_1) \otimes \cdots \otimes u_n(x_n)$. On notera cette application $u_1 \otimes \cdots \otimes u_n$.

Proposition 1. 9 *Si $u : M \to M''$ et $v : N \to N''$ sont surjectives, alors $u \otimes v$ est surjective.*
2) Si $u : M \to M''$ et $v : N \to N''$ sont bijectives, alors $u \otimes v$ est bijective et

$$(u \otimes v)^{-1} = u^{-1} \otimes v^{-1}.$$

Démonstration : 1) Il suffit de voir qu'un élément décomposable est dans $\mathrm{Im}\, u \otimes v$, ce qui est clair.
2) résulte de (7). $\square$

Proposition 1. 10 (Exactitude à droite) *Soient N un A-module et*

$$(E) \qquad 0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

une suite exacte courte. Alors la suite

$$(E) \otimes N \qquad M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes Id_N} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes Id_N} M'' \otimes N \to 0$$

est exacte. Si de plus (E) est scindée, alors

$$0 \to M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes Id_N} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes Id_N} M'' \otimes N \to 0$$

est exacte et scindée.

Démonstration : La surjectivité de $g \otimes Id_N$ résulte de (9) et $g \otimes Id_N \circ f \otimes Id_N = (g \circ f) \otimes Id_N = 0$ d'après (7), donc $\mathrm{Im}\,(f \otimes Id_N) \subset \mathrm{Ker}\,(g \otimes Id_N)$.
Réciproquement, notons $\pi : M \otimes N \to M \otimes N / \mathrm{Im}\,(f \otimes Id_N)$ l'application canonique. L'application bilinéaire composée

$$M \times N \to M \otimes N \to M \otimes N / \mathrm{Im}\,(f \otimes Id_N)$$

s'annule sur $M' \times N$, donc se factorise à travers $M'' \times N$, vu l'exactitude de (E). On en déduit par la propriété universelle de $M'' \otimes N$ une application linéaire

$$\varphi : M'' \otimes N \to M \otimes N / \mathrm{Im}\,(f \otimes Id_N)$$

telle que $\varphi \circ (g \otimes Id_N) = \pi$ donc $\mathrm{Ker}\,(g \otimes Id_N) \subset \mathrm{Ker}\,\pi = \mathrm{Im}\,(f \otimes Id_N)$.
Si (E) est scindée, il existe une application linéaire $r : M \to M'$ telle que $r \circ f = Id_{M'}$. Alors, $(r \otimes Id_N) \circ (f \otimes Id_N) = Id_{M'} \otimes Id_N$, donc $f \otimes Id_N$ est injective et $r \otimes Id_N$ constitue un scindage de $(E) \otimes N$. □

Exemple 1. 11 *Considérons pour $A = \mathbb{Z}$, l'application linéaire injective $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(x) = 2x$. Si on tensorise par $N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,*

$$f \otimes Id_N : \mathbb{Z} \otimes N \to \mathbb{Z} \otimes N$$

est nulle, donc n'est plus injective. En effet, pour tout $x \otimes y \in \mathbb{Z} \otimes N$,

$$f \otimes Id_N(x \otimes y) = 2x \otimes y = x \otimes 2y = 0.$$

Remarquer que la notation $x \otimes y$ peut être ambigue : Considérons $2n \otimes 1 \in 2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, avec n impair. Alors $2n \otimes 1 \neq 0$, mais considéré comme élément de $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $2n \otimes 1 = 0$.

Exercice 1. 12 *1) Soient M, N des modules $x_i \in M$, $y_i \in N$, $i = 1, \ldots, n$, tels que $\sum_i x_i \otimes y_i = 0$ dans $M \otimes N$. Soient M' et N' les sous-modules respectivement engendrés par $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$. Montrer qu'il existe des sous-modules M'' et N'' vérifiant $M' \subset M'' \subset M$ et $N' \subset N'' \subset N$ de types finis tels que $\sum_i x_i \otimes y_i = 0$ dans $M'' \otimes N''$.*
2) Montrer en prenant l'exemple de $2n \otimes 1 = 0$, n impair, dans $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qu'il n'est pas possible en général de prendre $M'' = M'$ et $N'' = N'$.

Proposition 1. 13 (Distributivité du produit tensoriel) *Soient $(M_i)_{i \in I}$ une famille de A-modules, $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, N un A-module et*

$$\varphi_i : M_i \to M, \quad \psi_i : M_i \otimes N \to \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes N)$$

les applications canoniques. Alors, il existe une unique application linéaire

$$f : M \otimes N \to \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes N),$$

telle que $f(\varphi_i(m_i) \otimes n) = \psi(m_i \otimes n)$ et f est un isomorphisme.

Démonstration : Remarquons d'abord que si $m = (m_i)_{i \in I} \in M$, $I(m) = \{i \in I \mid m_i \neq 0\}$ est fini, donc $(m_i \otimes n)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes N)$. D'une part, l'application

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \to & \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes N) \\ \big((m_i)_{i \in I}, n\big) & \mapsto & (m_i \otimes n)_{i \in I} \end{array}$$

est bilinéaire, il existe donc une application linéaire

$$f : M \otimes N \to \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes N)$$

telle que pour tout $i \in I$, tout $m_i \in M_i$, et tout $n \in N$, on ait

$$f(\varphi_i(m_i) \otimes n) = \psi_i(m_i \otimes n).$$

D'autre part, pour tout $i \in I$, l'application

$$\begin{array}{ccc} M_i \times N & \to & M \otimes N \\ (m_i, n) & \mapsto & \varphi_i(m_i) \otimes n \end{array}$$

étant bilinéaire, il existe $g_i : M_i \otimes N \to M \otimes N$ telle que pour tout $(m_i, n) \in M_i \times N$,

$$g_i(m_i \otimes n) = \varphi_i(m_i) \otimes n.$$

Posons $g = \oplus g_i$; pour tout $i \in I$, tout $m_i \in M_i$ et tout $n \in N$,

$$g \circ f\big(\varphi_i(m_i) \otimes n\big) = g\big(\psi_i(m_i \otimes n)\big) = \varphi_i(m_i) \otimes n,$$

$$f \circ g\big(\psi_i(m_i \otimes n)\big) = f\big(\varphi_i(m_i) \otimes n\big) = \psi_i(m_i \otimes n).$$

Comme les éléments $\varphi_i(m_i) \otimes n$ (resp. $\psi_i(m_i \otimes n)$) engendrent

$$M \otimes N \quad (\text{resp. } \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes N)),$$

f et g sont des isomorphismes réciproques. $\square$

Exercice 1. 14 Soient $M_1 = N_1 \oplus P_1$ et $M_2 = N_2 \oplus P_2$ des A-modules et $i_1 : N_1 \to M_1$, $i_2 : N_2 \to M_2$ les injections canoniques. Montrer que $i_1 \otimes i_2$ est injective et que $N_1 \otimes N_2$ admet un supplémentaire dans $M_1 \otimes M_2$.

Proposition 1. 15 (Bases) *Soit M un A-module libre de base $(e_i)_{i \in I}$ et N un A-module. Pour tout $x \in M \otimes N$, il existe une unique famille $(n_i)_{i \in I} \in N^{(I)}$ d'éléments de N telle que $x = \sum_{i \in I} e_i \otimes n_i$. Si de plus, N est libre de base $(\epsilon_j)_{j \in J}$, alors $(e_i \otimes \epsilon_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est une base de $M \otimes N$. En particulier, le produit tensoriel de deux modules libres est libre.*

Démonstration : L'existence des n_i est claire puisque l'ensemble des éléments de la forme $e_i \otimes n$, $i \in I$ et $n \in N$ est une partie génératrice. Notons $(e_i^\star)$ la famille libre duale. Soit f_i l'application composée

$$f_i = \eta \circ (e_i^\star \otimes Id_N) : M \otimes_A N \to A \otimes_A N \to N,$$

où $\eta : A \otimes_A N \to N$ est l'application canonique de (3) alors $n_i = f_i(x)$ est uniquement déterminé.
Si $(\epsilon_j)_{j \in J}$ est une base, chaque n_i s'écrit à son tour de façon unique comme combinaison linéaire, ce qui montre que $(e_i \otimes \epsilon_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est une base. $\square$

Proposition 1. 16 *Soient M_1, M_2 et N des A-modules. Il existe une unique application linéaire*

$$f : Hom_A(M_1, Hom_A(M_2, N)) \to Hom(M_1 \otimes M_2, N)$$

telle que pour tout $\varphi \in Hom(M_1, Hom(M_2, N))$, tout $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$, on ait

$$f(\varphi)(m_1 \otimes m_2) = \varphi(m_1)(m_2).$$

De plus f est un isomorphisme.

Démonstration : Soit $\varphi \in Hom(M_1, Hom(M_2, N))$; l'application

$$(m_1, m_2) \mapsto \varphi(m_1)(m_2)$$

étant bilinéaire, il existe une unique application linéaire $f(\varphi) : M_1 \otimes M_2 \to N$ telle que $f(\varphi)(m_1 \otimes m_2) = \varphi(m_1)(m_2)$. On va définir une application linéaire

$$g : Hom(M_1 \otimes M_2, N) \to Hom(M_1, Hom(M_2, N))$$

et on laisse le soin au lecteur de vérifier que f et g sont réciproques l'une de l'autre. Soit $\psi \in Hom(M_1 \otimes M_2, N)$. Pour tout $m_1 \in M_1$, l'application

$$\begin{array}{rccc} \psi_{m_1} : & M_2 & \to & N \\ & m_2 & \mapsto & \psi_{m_1}(m_2) = \psi(m_1 \otimes m_2) \end{array}$$

est linéaire. On définit alors $g(\psi)$ par

$$\begin{array}{rccc} g(\psi) : & M_1 & \to & Hom(M_2, N) \\ & m_1 & \mapsto & \psi_{m_1} \end{array}$$

□

La proposition suivante justifie la notation ambigue $u_1 \otimes u_2$:

Proposition 1. 17 *On a une application linéaire canonique*

$$\begin{array}{rccc} f : & Hom_A(M_1, N_1) \otimes Hom_A(M_2, N_2) & \to & Hom_A(M_1 \otimes M_2, N_1 \otimes N_2) \\ & u_1 \otimes u_2 & \mapsto & u_1 \otimes u_2 \end{array}$$

où $u_1 \otimes u_2 \in Hom_A(M_1 \otimes M_2, N_1 \otimes N_2)$ a été définie en (7). De plus, lorsque les quatre modules M_1, M_2, N_1, N_2 sont libres de type fini, il en est de même pour $Hom_A(M_1, N_1) \otimes Hom_A(M_2, N_2)$ et $Hom_A(M_1 \otimes M_2, N_1 \otimes N_2)$ et f est un isomorphisme.

Démonstration : Etant donné $(u_1, u_2) \in Hom(M_1, N_1) \times Hom(M_2, N_2)$, l'application

$$\begin{array}{ccc} M_1 \times M_2 & \to & N_1 \otimes N_2 \\ (m_1, m_2) & \mapsto & u_1(m_1) \otimes u_2(m_2) \end{array}$$

est bilinéaire ; il existe donc une unique application $F(u_1, u_2) : M_1 \otimes M_2 \to N_1 \otimes N_2$ telle que pour tout $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$,

$$F(u_1, u_2)(m_1 \otimes m_2) = u_1(m_1) \otimes u_2(m_2).$$

Grâce à l'unicité d'une telle application, on vérifie facilement que

$$\begin{array}{ccc} Hom(M_1, N_1) \times Hom(M_2, N_2) & \to & Hom_A(M_1 \otimes M_2, N_1 \otimes N_2) \\ (u_1, u_2) & \mapsto & F(u_1, u_2) \end{array}$$

est bilinéaire. Il existe donc une unique application linéaire

$$f : Hom(M_1, N_1) \otimes Hom(M_2, N_2) \to Hom_A(M_1 \otimes M_2, N_1 \otimes N_2)$$

telle que pour tout $(u_1, u_2) \in Hom(M_1, N_1) \times Hom(M_2, N_2)$, on ait

$$f(u_1 \otimes u_2) = F(u_1, u_2) = u_1 \otimes u_2.$$

Supposons maintenant tous les modules M_1, M_2, N_1, N_2 libres de type fini et munissons les respectivement des bases $(e_i)_{i \in I}, (f_j)_{j \in J}, (x_k)_{k \in K}, (y_l)_{l \in L}$. D'après (15), $(e_i \otimes f_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est une base de $M_1 \otimes M_2$, tandis que $(x_k \otimes y_l)_{(k,l) \in K \times L}$ est une base de $N_1 \otimes N_2$. Pour tout $(i, k) \in I \times K$, notons $\varphi_{i,k} : M_1 \to N_1$, l'application linéaire telle que pour tout $i' \in I$, $\varphi_{i,k}(e_{i'}) = \delta_{i,i'} x_k$. Notons également pour tout $(j, l) \in J \times L$, $\psi_{j,l} : M_2 \to N_2$

l'application linéaire telle que pour tout $j' \in J$, $\psi_{j,l}(f_{j'}) = \delta_{j,j'} y_l$. Notons enfin pour tout $(i,j,k,l) \in I \times J \times K \times L$, $\omega_{i,j,k,l} : M_1 \otimes M_2 \to N_1 \otimes N_2$ l'application linéaire telle que pour tout $(i', j') \in I \times J$,

$$\omega_{i,j,k,l}(e_{i'} \otimes f_{j'}) = \delta_{i,i'}\delta_{j,j'} x_k \otimes y_l.$$

Alors

$$\omega_{i,j,k,l}(e_{i'} \otimes f_{j'}) = \varphi_{i,k}(e_{i'}) \otimes \psi_{j,l}(f_{j'}),$$

donc

$$\omega_{i,j,k,l} = f(\varphi_{i,k} \otimes \psi_{j,l}).$$

Puisque les modules sont de type fini, $(\varphi_{i,k})_{(i,k)\in I\times K}$ est une base de $Hom(M_1, N_1)$ et $(\psi_{j,l})_{(j,l)\in J\times L}$ est une base de $Hom(M_2, N_2)$, tandis que $(\omega_{i,j,k,l})_{(i,j,k,l)\in I\times J\times K\times L}$ est une base de $Hom(M_1 \otimes M_2, N_1 \otimes N_2)$. D'après (15), $(\varphi_{i,k} \otimes \psi_{j,l})_{(i,j,k,l)\in I\times J\times K\times L}$, est une base de $Hom(M_1, N_1) \otimes Hom(M_2, N_2)$. On en déduit que G est un isomorphisme.

□

Remarque 1. 18 *Si M_1, M_2, N_1 et N_2 sont des modules quelconques,*

$$f : Hom_A(M_1, N_1) \otimes Hom_A(M_2, N_2) \to Hom_A(M_1 \otimes M_2, N_1 \otimes N_2)$$

peut être ni injective ni surjective, la notation $u_1 \otimes u_2$ peut donc prêter à confusion : Par exemple, $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \otimes Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) = 0$ car $(\mathbb{Q})^\star = 0$ mais $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \neq 0$ car contient toutes les homothéties $h_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto ax$, pour $a \in \mathbb{Q}$.

Corollaire 1. 19 *Si M_1 et M_2 sont des A-modules libres de type fini, on a un isomorphisme*

$$\varphi : M_1^\star \otimes M_2^\star \to (M_1 \otimes M_2)^\star$$

tel que pour tout $f_1 \in M_1^\star$, tout $f_2 \in M_2^\star$, et tout $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$, on ait $\varphi(f_1 \otimes f_2)(m_1 \otimes m_2) = f_1(m_1)f_2(m_2)$, autrement dit

$$\langle \varphi(f_1 \otimes f_2), m_1 \otimes m_2\rangle = \langle f_1, m_1\rangle\langle f_2, m_2\rangle.$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer (17) et (3) avec $N_1 = N_2 = A$. □

Proposition 1. 20 *Soient M_1, M_2, N_1, N_2 quatre A-modules libres de type fini. Pour tous $u_1 \in Hom(M_1, N_1)$ et $u_2 \in Hom(M_2, N_2)$, on a*

$${}^t(u_1 \otimes u_2) = {}^tu_1 \otimes {}^tu_2.$$

Démonstration : Pour tout $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$ et tout $(g_1, g_2) \in N_1^\star \times N_2^\star$, on a

$$\begin{aligned}\langle m_1 \otimes m_2, {}^t(u_1 \otimes u_2)(g_1 \otimes g_2)\rangle &= \langle u_1(m_1) \otimes u_2(m_2), g_1 \otimes g_2\rangle \\ &= \langle u_1(m_1), g_1\rangle\langle u_2(m_2), g_2\rangle = \langle m_1, {}^tu_1(g_1)\rangle\langle m_2, {}^tu_2(g_2)\rangle \\ &= \langle m_1 \otimes m_2, ({}^tu_1 \otimes {}^tu_2)(g_1 \otimes g_2)\rangle.\end{aligned}$$

□

Proposition 1. 21 *Soient M_1 et M_2 des A-modules libres de type fini. On a un unique isomorphisme*

$$\varphi : M_1^\star \otimes M_2 \to Hom(M_1, M_2),$$

tel que pour tout $f_1 \in M_1^\star$, tout $m_2 \in M_2$ et tout $m_1 \in M_1$, on ait

$$\varphi(f_1 \otimes m_2)(m_1) = \langle m_1, f_1\rangle m_2.$$

Démonstration : Il existe un isomorphisme $j : M_2 \to Hom(A, M_2)$, tel que $j(m_2)(1) = m_2$. D'autre part, d'après (17) et (3), il existe un isomorphisme

$$\varphi : Hom(M_1, A) \otimes Hom(A, M_2) \to Hom(M_1, M_2)$$

tel que pour tout $f_1 \in M_1^\star$, tout $f_2 \in Hom(A, M_2)$ et tout $m_1 \in M_1$, on ait

$$\varphi(f_1 \otimes f_2)(m_1) = f_1(m_1)f_2(1) = \langle m_1, f_1\rangle f_2(1).$$

Alors, $\psi = \varphi \circ (Id_{M_1^\star} \otimes j)$ est l'isomorphisme cherché. On le vérifie sur les éléments décomposables, et l'unicité en résulte. □

Remarque 1. 22 *La proposition 1.21 précédente est fausse pour le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Q}$. En effet $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \neq 0$ mais $\mathbb{Q}^\star \otimes \mathbb{Q} = 0$. Les hypothèses ne sont pas vérifiées, en effet $\mathbb{Q}$ n'est ni libre ni de type fini.*

Exercice 1. 23 *Montrer que $\mathbb{Q}$ en tant que $\mathbb{Z}$-module n'est pas de type fini sur $\mathbb{Z}$.*

Exercice 1. 24 *1) Soit F un $\mathbb{Z}$-module libre. Montrer que $F \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \neq 0$.*
2) Montrer que $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = 0$. En déduire que $\mathbb{Q}$ n'est pas libre.

Exercice 1. 25 *Soit P un A-module. On dit que P est un* **module projectif** *si pour toute application linéaire surjective $f : M \to N$, toute application linéaire $g : P \to N$ admet un relèvement $G : P \to M$ i.e. on a le diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "G"'] \arrow[d, "g"] & \\ M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

1) Montrer que tout module libre est projectif.
2) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
i) P est projectif
ii) Pour tout morphisme surjectif $f : M \to N$, l'application induite $Hom(P, M) \to Hom(P, N)$ est surjective
iii) P est un facteur direct de module libre
iv) Tout morphisme surjectif $u : M \to P$ scinde, c'est-à-dire il existe $v : P \to M$ tel que $u \circ v = Id_P$.
3) Montrer que le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Q}$ n'est pas projectif.

1.4 Platitude

Définition 1. 26 *On dit qu'un A-modules N est* **plat** *si pour toute application linéaire injective $u : M' \to M$, l'application linéaire $u \otimes Id_N : M' \otimes N \to M \otimes N$ est injective.*

Proposition 1. 27 *Soit N un A-module. Les propriétés suivantes sont équivalentes*
i) N est plat,
ii) Si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est une suite exacte de A-modules, la suite exacte

$$0 \to M' \otimes N \to M \otimes M \to M'' \otimes N \to 0$$

est exacte,
iii) Si $M' \to M$ est injective et que M, M'sont de type fini, $M' \otimes N \to M \otimes N$ est injective.

Démonstration : i) $\Rightarrow$ ii) résulte de la définition et de l'exactitude à droite du produit tensoriel 1.10.
ii) $\Rightarrow$ i) car tout morphisme injectif peut être complété en suite exacte.
i) $\Rightarrow$ iii) est évident.
iii) $\Rightarrow$ i) Soit $f : M' \to M$ un morphisme injectif et $u = \sum_{i=1}^{p} x_i \otimes y_i \in \operatorname{Ker} f \otimes Id_N$ Les éléments x_i, $i = 1, \ldots, p$ engendrent un sous-module de type fini M'_0 et on note M_0 le sous module $f(M'_0)$. On en déduit par restriction une application injective $f_0 : M'_0 \to M_0$ et d'après l'hypothèse $f_0 \otimes Id_N : M'_0 \otimes N \to M_0 \otimes N$ reste injective. Comme on a encore $f_0 \otimes Id_N(u_0) = 0$, $u_0 = 0$ et donc $u = 0$. $\square$

Proposition 1. 28 *Tout A-module libre N est plat. En particulier, si A est un corps, tout A-espace vectoriel est plat.*

Démonstration : Soient $f : M' \to M$ une application linéaire injective, $(\epsilon_i)_{i \in I}$ une base de N et $x \in M' \otimes N$. D'après (15), on a de façon unique $x = \sum_i m'_i \otimes \epsilon_i$, donc $f \otimes Id_N(x) = \sum_i f(m'_i) \otimes \epsilon_i$. Si $f \otimes Id_N(x) = 0$, on a par unicité, $f(m'_i) = 0$, donc $m'_i = 0$ pour tout $i \in I$ et $x = 0$. $\square$

Exercice 1. 29 *Soit M un A-module. Montrer les implications suivantes :*

$$M \text{ libre} \quad \Rightarrow M \text{ projectif} \quad \Rightarrow M \text{ plat}$$

2 Changement d'anneau

On considère un anneau A, un A-module M et une A-algèbre B, définie par un morphisme d'anneaux $h : A \to B$.
On suppose dans la suite que B est commutatif.
Tout B-module N est un A-module. On dit que cette structure de A-module est obtenue par **restriction des scalaires**. L'application

$$B \times N \to N, \quad (b, n) \mapsto bn$$

est A-bilinéaire, on a donc une application A-linéaire

$$\mu_N : B \otimes_A N \to N, \quad b \otimes n \mapsto bn.$$

Proposition et Définition 2. 30 *Soient M un A-module, B une A-algèbre et N un B-module.*

1. *Il existe une structure de B-module sur $M \otimes_A N$ telle que $b(m \otimes n) = m \otimes bn$ pour tout $(m, n, b) \in M \times N \times B$. On dit que le B-module $M \otimes_A N$ est déduit de M par* **changement de base**. *On dit aussi que le B-module $M_B = M \otimes_A B$ est obtenu par* **extension des scalaires**.
2. *Il existe un isomorphisme de B-modules*

$$(M \otimes_A B) \otimes_B N \to M \otimes_A N$$

envoyant $m \otimes b \otimes n$ sur $m \otimes bn$.

3. *Si C est une B-algèbre, l'isomorphisme précédent*

$$(M \otimes_A B) \otimes_B C \to M \otimes_A C$$

est un isomorphisme de C-modules.

4. Si M' est un A-module, il existe un isomorphisme de B-modules

$$(M \otimes_A B) \otimes_B (M' \otimes_A B) \to (M \otimes_A M') \otimes_A B$$

envoyant $(m \otimes b) \otimes (m' \otimes b')$ sur $m \otimes m' \otimes bb'$.

Démonstration : 1. Pour tout $b \in B$, $(m, n) \mapsto m \otimes bn$ est A-bilinéaire, ce qui donne une application A-linéaire $M \otimes_A N \to M \otimes_A N$ qui est la multiplication par b. Il suffit de vérifier sur les éléments décomposables que $M \otimes_A N$ est ainsi muni d'une structure de B-module.
2. L'application $(m, n) \mapsto m \otimes 1 \otimes n$ est A-bilinéaire de $M \times N$ dans $(M \otimes_A B) \otimes_B N$, ce qui donne une application A-linéaire

$$M \otimes_A N \to (M \otimes_A B) \otimes_B N.$$

On vérifie qu'elle est B-linéaire.
Inversement, si on fixe $n \in N$, l'application $(m, b) \mapsto m \otimes bn$ est A-bilinéaire de $M \times B$ dans $M \otimes_A N$. On en déduit une application

$$(M \otimes_A B) \times N \to M \otimes_A N$$

qui est B-bilinéaire, et donc une application B-linéaire

$$(M \otimes_A B) \otimes_B N \to M \otimes_A N.$$

On vérifie qu'elle est la réciproque de la précédente.
3. Il s'agit de voir que le B-isomorphisme donné en 2. est C-linéaire : En effet, pour tous $c, c' \in C$, $c'(m \otimes b \otimes c) = m \otimes b \otimes c'c$ a pour image $m \otimes bc'c = m \otimes c'bc = c'(m \otimes bc)$.
4. résulte de 2. et de l'associativité du produit tensoriel. $\square$

Remarque 2. 31 *Dans la restriction ou l'extension des scalaires, le morphisme d'anneau $h : A \to B$ n'est pas supposé injectif, donc A n'est pas nécessairement un sous-anneau de B.*

Exercice 2. 32 Soit B une A-algèbre et N un B-module. Notons N_A le A-module obtenu par restriction des scalaires. Montrer que $N_A \otimes_A B$ est isomorphe à N.

Exercice 2. 33 *Si $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux et que M est A-plat alors $M_B = M \otimes_A B$ est un B-module plat.*

Théorème 2. 34 (Propriété universelle de l'extension des scalaires) *Soit M un A-module, B une A-algèbre et $j : M \to M \otimes_A B$ l'application canonique telle que $j(m) = m \otimes 1$, pour tout $m \in M$. Alors :*
1) Pour tout B-module N, on a une structure de B-module sur $Hom_A(M, N)$ induite par celle de N,
2) (M, j) vérifie la propriété universelle suivante :
Pour toute application A-linéaire $f : M \to N$ dans un B-module, il existe une unique application B-linéaire $\tilde{f} : M \otimes_A B \to N$ telle que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "j"'] \arrow[dr, "f"] & \\ M \otimes_A B \arrow[rr, "\tilde{f}"] & & N \end{tikzcd}$$

soit commutatif. De plus, l'application B-linéaire

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & Hom_B(M \otimes_A B, N) & \to & Hom_A(M, N) \\ & \tilde{f} & \mapsto & \tilde{f} \circ j \end{array}$$

est un isomorphisme de B-modules.

Démonstration : On pose $\tilde{f}(m \otimes b) = bf(m)$ et $\tilde{f}$ est B-linéaire par construction. Si $\epsilon_N : N \otimes_B B \to N$ est l'application canonique, l'inverse de φ est $f \mapsto \epsilon_N \circ (f \otimes Id_B)$. $\square$

Proposition 2. 35 *Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice (resp. une base) du A-module M. Alors, $(e_i \otimes 1)_{i\in I}$ est une famille génératrice (resp. une base) du B-module $M \otimes_A B$.*

Démonstration : L'assertion est claire pour une famille génératrice puisque pour tout $b \in B$, $e_i \otimes b = b(e_i \otimes 1)$. Supposons que $(e_i)_{i\in I}$ soit une base de M. D'après le théorème (34), il existe pour tout $i \in I$ une application B-linéaire $f_i : M \otimes_A B \to B$ telle que $f_i(e_j \otimes 1) = \delta_{i,j}$, de sorte que pour tout $J \subset I$ fini,

$$f_i\Big(\sum_{j\in J} b_j(e_j \otimes 1)\Big) = b_i.$$

On en déduit que si $\sum_{j\in J} b_j(e_j \otimes 1) = 0$ est une relation, $b_i = 0$ pour tout $i \in I$. $\square$

Voici un premier exemple d'extension des scalaires :

Proposition 2. 36 *Soit $I \subset A$ un idéal de A. Alors l'application*

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & M & \to & M \otimes_A A/I \\ & m & \mapsto & m \otimes \bar{1}, \end{array}$$

se factorise à travers $\pi : M \to M/IM$ pour donner un isomorphisme de A/I-modules

$$\bar{\varphi} : M/IM \stackrel{\simeq}{\to} M \otimes_A A/I.$$

Démonstration : Notons $p : A \to A/I$, $a \mapsto \bar{a}$, l'application canonique. Pour tout $a \in I$ et tout $m \in M$, $\varphi(am) = am\otimes\bar{1} = m\otimes\bar{a} = 0$, donc $\operatorname{Ker}\varphi \supset IM$ et φ se factorise pour donner $\bar{\varphi}$ tel que $\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$. Inversement, comme l'application canonique p fait de A/I une A-algèbre et que M/IM a une structure de A/I-module, la propriété universelle de l'extension des scalaires donne une application A/I-linéaire

$$\psi : M \otimes_A A/I \to M/IM,$$

telle que $\psi \circ \varphi = \pi$. Ces deux applications sont réciproques :

$$\forall\, \pi(m) \in M/IM, \quad \psi \circ \bar{\varphi}(\pi(m)) = \psi \circ \varphi(m) = \pi(m)$$

$$\forall\, m \otimes \bar{a}, \quad \bar{\varphi} \circ \psi(m \otimes \bar{a}) = \bar{\varphi} \circ \psi(am \otimes \bar{1}) = \bar{\varphi} \circ \psi \circ \varphi(am) = \bar{\varphi} \circ \pi(am) = \varphi(am) = m \otimes \bar{a}.$$

$\square$

Exercice 2. 37 *Calculer les produits tensoriels $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Voici un second exemple d'extension des scalaires :

2.1 Corps de fractions

Soit A un anneau commutatif **intègre** et M un A-module. On va mettre une relation d'équivalence sur $M \times A \setminus \{0\}$:
$(m, a) \sim (m', a')$ si et seulement si il existe $t \in A \setminus \{0\}$ tel que $ta'm = tam'$. La seule vérification non évidente est la transitivité et elle explique la présence du facteur multiplicatif t.
Supposons $(m, a) \sim (m', a')$ et $(m', a') \sim (m'', a'')$, il existe donc t, t' tels que

$$t(am' - a'm) = 0, \quad t'(a'm'' - a''m') = 0$$

et donc
$$tt'a''(am'-a'm)=0,\quad tt'a(a'm''-a''m')=0$$
il reste à additionner ces deux égalités pour trouver
$$tt'a'(am''-a''m)=0.$$
On note $\frac{m}{a}$ une classe d'équivalence. Lorsque $M=A$, la relation se simplifie en $(a,b)\sim(a',b')$ si et seulement si $a'b=ab'$ et on obtient un corps $K=K_A$ appelé le **corps des fractions de** A. On a une injection A-linéaire
$$i:A\to K,\quad a\mapsto\frac{a}{1}$$
Pour un module quelconque on note M_K l'ensemble des classes d'équivalences. On a une structure de K-espace vectoriel en posant
$$\frac{m}{a}+\frac{m'}{a'}=\frac{a'm+am'}{aa'},\quad\text{et}\quad\frac{b}{a}\frac{m}{c}=\frac{bm}{ac}.$$
On appelle M_K muni de ces opérations **l'espace vectoriel des fractions de M**. Par définition de la relation d'équivalence, $\frac{m}{a}=0$ si et seulement si il existe $t\neq 0$ tel que $tm=0$ c'est-à-dire, m est de torsion. L'application A-linéaire $M\to M_K$, $m\to\frac{m}{1}$ dans le K-espace vectoriel M_K induit d'après (34) une application K-linéaire
$$j:K\otimes_A M\to M_K$$
telle que $j(1\otimes m)=\frac{m}{1}$. Puisque j est K-linéaire, on a $j(\frac{b}{a}\otimes m)=\frac{bm}{a}$.

Exemple 2. 38 *Soient les $\mathbb{Z}$-modules $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. On obtient les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\simeq\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$. Le premier a pour base $\{1\}$; le second a une base infinie.*

Exercice 2. 39 Montrer que si A est un corps, l'application canonique $i:A\to K_A$ est un isomorphisme, c'est-à-dire A est isomorphe à son corps des fractions.

Exercice 2. 40 *L'application A-linéaire*
$$i_M:M\to M_K,\quad m\mapsto\frac{m}{1}$$
est-elle injective ? Montrer que $j:K\otimes_A M\to M_K$ est un isomorphisme.

Théorème 2. 41 *Soit A un anneau intègre et K son corps des fractions.*

1. *Tout élément $x\in K\otimes_A M$ peut s'écrire sous la forme $x=1/a\otimes m$, où $(a,m)\in A\setminus\{0\}\times M$. De plus, $1/a\otimes m=1/a'\otimes m'$, si et seulement si, il existe $t\in A\setminus\{0\}$ tel que $ta'm=tam'$. En particulier, $1\otimes m=0$ si et seulement si, $m\in M$ est un élément de torsion.*
2. *K est un A-module plat.*

Démonstration : 1. Soit $x=\sum_i k_i\otimes m_i\in K\otimes_A M$. En choisissant un dénominateur commun, on a
$$x=\sum_i\frac{b_i}{a}\otimes m_i=\frac{1}{a}\otimes(\sum_i b_im_i).$$
Supposons qu'il existe $t\in A\setminus\{0\}$ tel que $ta'm=tam'$; alors,
$$\frac{1}{taa'}\otimes ta'm=\frac{1}{taa'}\otimes tam',$$

c'est-à-dire $\frac{1}{a} \otimes m = \frac{1}{a'} \otimes m'$. Réciproquement, si $\frac{1}{a} \otimes m = \frac{1}{a'} \otimes m'$ on a

$$\frac{m}{a} = j(\frac{1}{a} \otimes m) = j(\frac{1}{a'} \otimes m') = \frac{m'}{a'},$$

donc il existe $t \neq 0$ tel que $tam' = ta'm$.
2. Soit $u : M \to M'$ une application A-linéaire injective. Nous allons voir que $Id_K \otimes u : K \otimes M \to K \otimes M'$ est injective : en effet, si $\frac{1}{a} \otimes u(m) = 0$, il résulte de 1) que $u(m)$ est de torsion, donc m aussi puisque u est injective, mais alors $1 \otimes m = 0$, ce qui entraine $\frac{1}{a} \otimes m = 0$.
$\square$

Exercice 2. 42 *Montrer que $\mathbb{Q}$ est un $\mathbb{Z}$-module plat mais que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ne l'est pas.*

2.2 Produit tensoriel d'algèbres

Soient $h : A \to B$ et $k : A \to C$ deux A-algèbres. Notons

$$\varphi : B \to B \otimes_A C \quad (\text{resp.}\, \psi : C \to B \otimes_A C)$$

l'application linéaire définie par $\varphi(b) = b \otimes 1$ (resp. $\psi(c) = 1 \otimes c$). Puisque pour tout $a \in A$, $h(a) \otimes 1 = a(1 \otimes 1) = 1 \otimes k(a)$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "k"] & \\ B \arrow[dr, "\varphi"'] & & C \arrow[dl, "\psi"] \\ & B \otimes_A C & \end{tikzcd}$$

ce qui permet de poser $\delta = \psi \circ k = \varphi \circ h$. On va voir que $\delta : A \to B \otimes_A C$ fait de $B \otimes_A C$ une A-algèbre. En effet, les deux opérations $B \times B \to B$ et $C \times C \to C$ donnent deux applications A-linéaires

$$\mu_B : B \otimes_A B \to B, \quad \mu_C : C \otimes_A C \to C.$$

Alors l'application composée, où la première est l'application canonique, la seconde utilise la symétrie et l'associativité du produit tensoriel,

$$(B \otimes_A C) \times (B \otimes_A C) \stackrel{\otimes}{\to} (B \otimes_A C) \otimes_A (B \otimes_A C) \stackrel{\sim}{\to} (B \otimes_A B) \otimes_A (C \otimes_A C) \stackrel{\mu_B \otimes \mu_C}{\longrightarrow} B \otimes_A C,$$

définit un produit commutatif sur $(B \otimes_A C)$ tel que pour tous $b, b' \in B$, $c, c' \in C$,

$$(b \otimes c)(b' \otimes c') = bb' \otimes cc'.$$

Remarquer que par construction la multiplication est distributive sur l'addition. On laisse au lecteur les autres vérification concernant la structure d'algèbre. Les morphismes φ et ψ sont des morphismes de A-modules ; ce sont aussi des morphismes d'anneaux, par exemple, pour tous $b, b' \in B$, $\varphi(bb') = bb' \otimes 1 = (b \otimes 1)(b' \otimes 1) = \varphi(b)\varphi(b')$.

Théorème 2. 43 (Propriété univ. du produit tensoriel de deux algèbres) *Avec les notations précédentes, le triplet $(B \otimes_A C, \varphi, \psi)$ a la propriété universelle suivante : Pour tout triplet (D, f, g) constitué d'une A-algèbre D et de deux morphismes de A-algèbres $f : B \to D$ et $g : C \to D$, il existe un unique morphisme de A-algèbres $\zeta : B \otimes_A C \to D$ tel que*

$$\zeta \circ \varphi = f, \quad \text{et} \quad \zeta \circ \psi = g.$$

Autrement dit, pour toute A-algèbre D, le morphisme de A-algèbres suivant est bijectif

$$\begin{array}{cccc} \Psi : & Hom_{A-alg}(B \otimes_A C, D) & \longrightarrow & Hom_{A-alg}(B, D) \times Hom_{A-alg}(C, D) \\ & \zeta & \longmapsto & (\zeta \circ \varphi, \zeta \circ \psi) \end{array}$$

Démonstration : Soient $f : B \to D$ et $g : C \to D$ deux morphismes de A-algèbres. L'application $B \times C \to D$, $(b, c) \mapsto f(b)g(c)$ est bilinéaire, on a donc une unique application linéaire $\zeta : B \otimes_A C \to D$ telle que $\zeta(b \otimes c) = f(b)g(c)$. On en déduit que $\zeta \circ \varphi = f$ et $\zeta \circ \psi = g$, i.e. $\Psi(\zeta) = (f, g)$, donc Ψ est surjective et l'injectivité résulte de l'unicité. $\square$

Corollaire 2. 44 *Soit $g : C \to D$ un morphisme de A-algèbres. Alors :*
1) L'application

$$\begin{array}{ccc} Hom_{C-alg}(B \otimes_A C, D) & \to & Hom_{A-alg}(B, D) \\ \zeta & \mapsto & \zeta \circ \varphi \end{array}$$

est bijective.
2) L'isomorphisme canonique de B-modules

$$B \otimes_A C \otimes_C D \to B \otimes_A D$$

est un isomorphisme de B et D-algèbres.

Démonstration : 1) On applique (43) car un morphisme de C-algèbres $\zeta : B \otimes_A C \to D$ est un morphisme de A-algèbres tel que $\zeta \circ \psi = g$.
2) On vérifie que cette application est B-linéaire et D-linéaire. $\square$

Voici quelques exemples d'algèbres obtenues par extensions des scalaires :

Exemple 2. 45 1) **Extension des scalaires par un anneau quotient** : Soit I un idéal de A et B une A-algèbre. Alors, l'isomorphisme de A/I-modules donné par (36)

$$B/IB \xrightarrow{\sim} A/I \otimes_A B$$

est un isomorphisme de A/I-algèbres.
2) **Extension des scalaires d'un anneau de polynômes**. Si $h : A \to B$ est une A-algèbre, il existe un unique morphisme de B-algèbres

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & B \otimes A[X] & \to & B[X] \\ & b \otimes \sum_i a_i X^i & \mapsto & \sum_i bh(a_i) X^i. \end{array}$$

Inversement, un morphisme de B-algèbres de $B[X]$ dans une autre B-algèbre est déterminée par l'image de X. On définit donc un morphisme $\psi : B[X] \to B \otimes A[X]$ en posant $\psi(X) = 1 \otimes X$. On vérifie facilement que φ et ψ sont inverses l'une de l'autre donc les deux algèbres sont isomorphes.

Exercice 2. 46 *Soit K un corps et $K(X)$ le corps des fractions rationnelles.*
1) Montrer que $K[X] \otimes_K K[Y]$ et $K[X, Y]$ sont isomorphes.
2) Montrer qu'on a un morphisme de K-algèbres

$$\varphi : K(X) \otimes K(Y) \to K(X, Y)$$

tel que $\varphi(X \otimes 1) = X$ et $\varphi(1 \otimes Y) = Y$.
3) Montrer que tout élément T de $K(X) \otimes K(Y)$ peut être mis sous la forme

$$T = \sum_i \frac{P_i}{F} \otimes \frac{Q_i}{G}, \quad \text{avec} \quad P_i \in K[X], Q_i \in K[Y], F \in K[X], G \in K[Y].$$

4) Montrer que pour tout $T' \in \operatorname{Im} \varphi$, il existe des polynômes $F \in K[X]$ et $G \in K[Y]$ tel que FGT' soit un polynôme.
5) Montrer que $\frac{1}{X+Y}$ n'est pas dans l'image de φ et donc que $K(X) \otimes K(Y)$ et $K(X, Y)$ ne sont pas canoniquement isomorphes.

Exercice 2. 47 *Soient A un anneau, I un idéal, M un A-module et N un sous-module de M. Montrer que $IN \subset IM \cap N$ et que l'application canonique*

$$N \otimes_A A/I \to M \otimes_A A/I$$

est injective si et seulement si $IN = IM \cap N$.

Exercice 2. 48 *Soient M et N des A-modules et $A \to B$ une A-algèbre. Montrer qu'il existe un unique morphisme de B-modules*

$$\psi : Hom_A(M, N) \otimes_A B \longrightarrow Hom_B(M \otimes_A B, N \otimes_A B)$$

tel que $\big(\psi(u \otimes b)\big)(m \otimes b') = u(m) \otimes bb'$. Montrer que si M est libre de type fini, alors ψ est un isomorphisme. Donner un exemple où ψ n'est pas un isomorphisme.

2.3 Complexification

Soit K un corps, E un K-espace vectoriel et B une K-algèbre non nulle. Alors l'application canonique

$$\begin{array}{cccc} j: & E & \to & E_B = E \otimes_K B \\ & x & \mapsto & x \otimes 1 \end{array}$$

est injective. En effet, si $x \neq 0$, alors x appartient à une base de E et $x \otimes 1$ appartient à une base de E_B, en particulier est non nul. On peut donc identifier E à un sous-ensemble de E_B. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Une base $(e_i)_{i \in J}$ de F peut être complétée en une base de E, $(e_i)_{i \in I}$, $J \subset I$, donc F_B est un sous-module de E_B et $F = F_B \cap E$.
Considérons maintenant le cas particulier $K = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{C}$. Soit $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la conjugaison et notons σ_E l'endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire $Id_E \otimes \sigma : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$. Comme $\sigma_E^2 = Id_{E_{\mathbb{C}}}$, le polynôme caractéristique de σ_E est $P(X) = X^2 - 1$ et il existe deux espaces propres : E associé à la valeur propre 1 et iE associé à la valeur propre -1, et on a $E_{\mathbb{C}} = E \oplus iE$.
Si V est un sous-espace vectoriel complexe de $E_{\mathbb{C}}$ de dimension complexe p, alors l'application $\mathbb{R}$-linéaire

$$\begin{array}{ccc} V \cap E & \to & V \cap iE \\ x & \mapsto & ix \end{array}$$

est un isomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire, donc

$$\dim_{\mathbb{R}} V \cap E = \dim_{\mathbb{R}} V \cap iE,$$

et comme $\dim_{\mathbb{R}} V \cap E + \dim_{\mathbb{R}} V \cap iE \leq \dim_{\mathbb{R}} V = 2p$, on a

$$\dim_{\mathbb{R}} V \cap E \leq p.$$

Exemple 2. 49 *L'inégalité précédente peut être stricte. Considérons $E = \mathbb{R}^2$, $E_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$, $x = (1+i, 1-i)$ et $V = \mathbb{C}x$ la droite complexe engendrée par x. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On a $zx \in V \cap \mathbb{R}^2$ si et seulement si $z(1+i) \in \mathbb{R}$ et $z(1-i) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z = 0$, c'est-à-dire*

$$V \cap \mathbb{R}^2 = V \cap i\mathbb{R}^2 = \{0\}.$$

Le sous-espace complexe V ne peut être le complexifié d'aucun espace réel.

Le problème se pose donc de déterminer les complexifiés des sous-espaces réels $F \subset E$. La proposition suivante fournit une réponse :

Proposition 2. 50 *Soit V un sous-espace complexe de $E_{\mathbb{C}}$ de dimension complexe p. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $\dim_{\mathbb{R}} V \cap E = p$,

ii) $V=(V\cap E)\oplus(V\cap iE)$,

iii) $\sigma_E(V)=V$,

iv) Il existe un sous-espace F *de* E *tel que* $V=F_{\mathbb{C}}$.

Démonstration : $i) \iff ii)$ Car $\dim_{\mathbb{R}} V = 2p$ et $\dim_{\mathbb{R}} V\cap E = \dim_{\mathbb{R}} V\cap iE$.
$ii) \iff iii)$ Les sous-espaces propres de σ_E sont stables par σ_E donc $\sigma_E(V)=V$. Réciproquement, pour tout $x\in V$,

$$x=\frac{1}{2}(x+\sigma_E(x))+\frac{1}{2}(x-\sigma_E(x))$$

et on constate que $\sigma_E(x+\sigma_E(x))=x+\sigma_E(x)$ c'est-à-dire $x+\sigma_E(x)\in V\cap E$ et de même $x-\sigma_E(x)\in V\cap iE$.
$iii) \Rightarrow iv)$ Comme σ_E est un isomorphisme on a $\sigma_E(V\cap E)=V\cap E$. Le sous-espace réel $F=V\cap E$ est l'espace cherché.
$iv) \Rightarrow i)$ Si $V=F_{\mathbb{C}}$, $V\cap E=F$, donc $\dim_{\mathbb{R}} F=\dim_{\mathbb{C}} F_{\mathbb{C}}=\dim_{\mathbb{C}} V=p$. □

Exercice 2. 51 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u\in End_{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}})$. Montrer qu'il existe $v\in End_{\mathbb{R}}(E)$ tel que $u=v\otimes Id_{\mathbb{C}}$ si et seulement si $\sigma_E\circ u=u\circ\sigma_E$.

Exercice 2. 52 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On note $E_{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel sous-jacent à E, c'est-à-dire obtenu par restriction des scalaires. Soit $\sigma: E_{\mathbb{R}}\to E_{\mathbb{R}}$ un endomorphisme vérifiant $\sigma^2=Id_{E_{\mathbb{R}}}$ et $\sigma\circ i=-i\circ\sigma$, où i désigne l'endomorphisme réel associé à la multiplication par $i=\sqrt{-1}$. On pose $F=\operatorname{Ker}(\sigma-Id_{E_{\mathbb{R}}})$.
1) Montrer que l'application canonique $F\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\to E$ est un isomorphisme.
2) Soit $G\subset E_{\mathbb{R}}$ un sous-espace vectoriel. Montrer que l'application canonique

$$G\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\to E$$

est injective si et seulement si il existe un endomorphisme $\sigma: E_{\mathbb{R}}\to E_{\mathbb{R}}$ vérifiant $\sigma^2=Id_{E_{\mathbb{R}}}$, $\sigma\circ i=-i\circ\sigma$ et tel que $G\subset\operatorname{Ker}(\sigma-Id_{E_{\mathbb{R}}})$.

3 Algèbre tensorielle

A est un anneau commutatif et M un A-module

Pour tout entier $n\geq 2$, on note $M^{\otimes n}$ le produit tensoriel de n A-modules égaux à M, et on pose $M^{\otimes 0}=A$, $M^{\otimes 1}=M$. On note $\bigotimes M=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}M^{\otimes n}$ et $i_n: M^{\otimes n}\to\bigotimes M$ l'injection canonique. Pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\varphi_{p,q}: M^{\otimes p}\otimes M^{\otimes q}\to M^{\otimes p+q}$ l'application canonique et on des applications linéaires canoniques

$$\varphi=\bigoplus_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} i_{p+q}\circ\varphi_{p,q}:\bigoplus_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} M^{\otimes p}\otimes M^{\otimes q}\to\bigotimes M$$

$$s:\bigotimes M\otimes\bigotimes M\to\bigoplus_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} M^{\otimes p}\otimes M^{\otimes q}$$

et l'application bilinéaire canonique

$$\Phi:\bigotimes M\times\bigotimes M\to\bigotimes M\otimes\bigotimes M.$$

L'application bilinéaire

$$F=\varphi\circ s\circ\Phi:\bigotimes M\times\bigotimes M\to\bigotimes M$$

définit une opération

$$\forall x, y \in \bigotimes M, \quad x.y = F(x, y)$$

qui est par construction distributive sur l'addition. Si $p \geq 1$, $q \geq 1$, $(m_1, \ldots, m_p) \in M^p$, $(m_{p+1}, \ldots, m_{p+q}) \in M^q$,

$$i_p(m_1 \otimes \cdots \otimes m_p).i_q(m_{p+1} \otimes \cdots \otimes m_{p+q}) = i_{p+q}(m_1 \otimes \cdots \otimes m_{p+q}).$$

On identifie désormais $M^{\otimes n}$ avec son image $i_n(M^{\otimes n})$. Le produit a les propriétés suivantes :

1. $\forall (m_1, \ldots, m_{p+q}) \in M^{p+q}$,
$$m_1 \otimes \cdots \otimes m_p.m_{p+1} \otimes \cdots \otimes m_{p+q} = m_1 \otimes \cdots \otimes m_{p+q},$$
2. $\forall a \in A, \forall (m_1, \ldots, m_p) \in M^p$,
$$m_1 \otimes \cdots \otimes m_p.a = a(m_1 \otimes \cdots \otimes m_p) = a.(m_1 \otimes \cdots \otimes m_p),$$
3. $\forall a, b \in A$, $a.b = ab$.

Proposition 3. 53 *Le A-module $\bigotimes M$ muni de l'opération $(x, y) \mapsto x.y$ est une A-algèbre. Pour tout $a \in A$ et tout $x \in \bigotimes M$, $a.x = ax = x.a$. Quels que soient $m_1, \ldots, m_n \in M$, $m_1. \ldots .m_n = m_1 \otimes \cdots \otimes m_n$.*

Démonstration : Le produit est associatif : il suffit, vu la distributivité du produit sur l'addition, de le vérifier pour $x \in M^{\otimes p}$, $y \in M^{\otimes q}$, $z \in M^{\otimes r}$, x, y et z étant décomposables. Mais dans ce cas, c'est une conséquence de l'associativité du produit tensoriel et des propriétés 1, 2, 3 précédentes. Comme $\bigotimes M$ est un A-module, $a.x = ax = x.a$, en particulier $1 \in A$ est l'élément neutre, donc $\bigotimes M$ est un anneau. De plus, pour tous $x, y \in \bigotimes M$,

$$a(x.y) = a.(x.y) = (a.x).y = (ax).y = (x.a).y = x.(a.y) = x.(ay).$$

donc $\bigotimes M$ est une A-algèbre. Enfin pour tous $m_1, m_2 \in M$, $m_1.m_2 = m_1 \otimes m_2$, on montre la dernière assertion par récurrence. $\square$

Définition 3. 54 *L'algèbre $(M, i_1, \bigotimes M)$ est appelée l'***algèbre tensorielle** *du A-module M. Pour tout n, $M^{\otimes n}$ est appelée la* **n-ième puissance tensorielle** *de M. On dit que $m \in \bigotimes M$ est* **homogène de degré *p*** *si $m \in M^{\otimes p}$ et il est dit* **homogène** *s'il existe p tel que m soit homogène de degré p. Tout élément est donc somme finie d'éléments homogènes décomposable.*

L'algèbre tensorielle n'est pas commutative en général.

Théorème 3. 55 (Propriété universelle de l'algèbre tensorielle) *Soit B une A-algèbre et $u : M \to B$ une application linéaire. Alors, il existe un unique morphisme de A-algèbre $U : \bigotimes M \to B$ tel que le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "i_1"'] \arrow[dr, "u"] & \\ \bigotimes M \arrow[rr, "U"] & & B \end{tikzcd}$$

soit commutatif, c'est-à-dire, $U \circ i_1 = u$. De plus pour tout $m \in M$, $a \in A$, on a $U(a) = a.1_B$.

Démonstration : Pour tout $n \geq 1$, l'application $(m_1, \ldots, m_n) \mapsto u(m_1) \cdots u(m_n)$ de M^n dans B est n-linéaire. Il existe donc une application linéaire

$$\begin{array}{cccc} U_n : & M^{\otimes n} & \to & B \\ & m_1 \otimes \cdots \otimes m_n & \mapsto & u(m_1) \cdots u(m_n) \end{array}$$

Pour tout $a \in A$, posons $U_0(a) = a1_B$, de sorte que U_0 est linéaire. Il reste à poser $U = \oplus_n U_n$. Pour vérifier que U est un morphisme de A-algèbres, il suffit de le faire pour des éléments homogènes décomposables. Pour $x = m_1 \otimes \cdots \otimes m_p \in M^{\otimes p}$, $y = m_{p+1} \otimes \cdots \otimes m_{p+q} \in M^{\otimes q}$, on a

$$\begin{aligned} U(x.y) &= U_{p+q}(x.y) = U_{p+q}(m_1 \otimes \cdots \otimes m_{p+q}) = u(m_1) \cdots u(m_{p+q}) \\ &= \big(u(m_1) \cdots u(m_p)\big)\big(u(m_{p+1}) \cdots u(m_{p+q})\big) \\ &= U_p(m_1 \otimes \cdots \otimes m_p) U_q(m_{p+1} \otimes \cdots \otimes m_{p+q}) \\ &= U(m_1 \otimes \cdots \otimes m_p) U(m_{p+1} \otimes \cdots \otimes m_{p+q}) = U(x)U(y). \end{aligned}$$

□

Corollaire 3. 56 (Fonctorialité) *1) Soient M et N des A-modules, $(i_M, \bigotimes M)$ et $(i_N, \bigotimes N)$ les algèbres tensorielles de M et N. Pour toute application A-linéaire $u : M \to N$ il existe un unique morphisme de A-algèbres noté $\otimes u : \bigotimes M \to \bigotimes N$, appelé le* **morphisme d'algèbres tensorielles défini par u** *tel que le diagramme suivant soit commutatif*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i_M"'] & N \arrow[d, "i_N"] \\ \bigotimes M \arrow[r, "\otimes u"] & \bigotimes N \end{tikzcd}$$

2) Soit $v : N \to P$ une autre application linéaire. Alors,

$$\otimes(v \circ u) = \otimes u \circ \otimes v.$$

Démonstration : 1) On applique la propriété universelle de l'algèbre tensorielle à $i_N \circ u$.
2) Les morphismes d'algèbres $\otimes(v \circ u)$ et $\otimes u \circ \otimes v$ font commuter le même diagramme. D'après l'unicité on a l'égalité. □

Exercice 3. 57 *Soit $u : M \to N$ une application A-linéaire. Notons pour $m \geq 0$ et $n \geq 0$, $i_m : M^{\otimes n} \to \bigotimes M$ et $j_n : N^{\otimes n} \to \bigotimes N$ les injections canoniques. Vérifier que*

$$(\otimes u) \circ (\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} i_n) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (j_n \circ u^{\otimes n}).$$

Proposition 3. 58 *Soit $u : M \to N$ une application linéaire.*

1. *Si u est surjective, alors $\otimes u : \bigotimes M \to \bigotimes N$ est surjectif.*
2. *Si u est bijective, alors $\otimes u$ est bijectif et $(\otimes u)^{-1} = \otimes(u^{-1})$.*
3. *Si u est injective et $\operatorname{Im} u$ admet un supplémentaire dans N, alors $\otimes u$ est injectif et $\operatorname{Im}(\otimes u)$ admet un supplémentaire dans $\bigotimes N$.*

Démonstration : 1) Les applications $u^{\otimes 0} : A \to A$ et $u^{\otimes 1} : M \to N$ sont évidemment surjectives. Pour tout $n \geq 2$, $u^{\otimes n} : M^{\otimes n} \to N^{\otimes n}$ est surjective d'après (9). Comme une somme directe d'applications surjectives est surjective, $\otimes u$ est surjective.
2) Cela résulte de (56).
3) Il existe une application linéaire $r : N \to M$ telle que $r \circ u = Id_M$. Alors, avec (56),

$$(\otimes r) \circ (\otimes u) = \otimes(r \circ u) = \otimes Id_M = Id_{\bigotimes M}$$

ce qui prouve que $\otimes u$ est injectif et que $\mathrm{Im}\,(\otimes u)$ admet un supplémentaire dans $\bigotimes N$. $\square$

Remarque 3. 59 1) On a défini un foncteur covariant $\bigotimes : \mathcal{M}_A \to \mathcal{A}_A$ de la catégorie des A-modules dans la catégorie des A-algèbres.
2) On a déjà vu que le produit tensoriel ne conserve pas l'injectivité. Voici un exemple d'application linéaire injective j telle que $\otimes j$ ne soit pas injectif :
Considérons les $\mathbb{Z}$-modules $M = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et soit $j : M \to N$ l'injection canonique. Pour tous $\epsilon \in N$ et $\eta \in N$, $(2\epsilon) \otimes (2\eta) = (4\epsilon) \otimes \eta = 0$, donc $\otimes j(M \otimes M) = 0$. Cependant, l'isomorphisme linéaire $\varphi : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ induit un isomorphisme $\Phi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et puisque l'application bilinéaire $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto xy$, est non nulle on a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \neq 0$. On en déduit que $M \otimes M \neq 0$, donc $\otimes j$ n'est pas injectif.

Proposition 3. 60 *Soit M un A-module libre. Alors $\bigotimes M$ est un A-module libre. Plus précisément, soit $(e_i)_{i \in I}$ est une base de M, et notons S l'ensemble des suites finies $(i_1, \ldots, i_n) \in I^n$ d'éléments de I, où $n \geq 0$. Posons $e_\emptyset = 1$ et $e_{(i_1,\ldots,i_n)} = e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}$. Alors, $(e_s)_{s \in S}$ est une base de $\bigotimes M$.*

Démonstration : Notons S_n les suites de longueur n. D'après (15), $(e_s)_{s \in S_n}$ est une base de $M^{\otimes n}$, ce qui donne le résultat. $\square$

4 Algèbre extérieure

***A* est un anneau commutatif et *M* est un *A*-module**

Définition 4. 61 *Soit I l'idéal bilatère de l'anneau $\bigotimes M$ engendré par les éléments de la forme $m \otimes m$ pour $m \in M$. C'est aussi un sous-module de $\bigotimes M$, donc l'anneau quotient $\bigotimes M/I$ est une A-algèbre. On appelle*

$$\bigwedge M = \bigotimes M/I$$

*l'***algèbre extérieure de M**. *Le produit de deux éléments $x, y \in \bigwedge M$ est noté $x \wedge y$. Pour tout $n \geq 0$, le module quotient*

$$\bigwedge^n M = M^{\otimes n}/(I \cap M^{\otimes n}) = (I + M^{\otimes n})/I,$$

est appelé la **puissance extérieure n-ième de M**.

Lemme 4. 62 *On a $I = \sum_{n \in \mathbb{N}} (I \cap M^{\otimes n})$, $I \cap M^{\otimes 0} = 0$, $I \cap M^{\otimes 1} = 0$, $\bigwedge^0 M = A$, et $\bigwedge^1 M = M$. Etant donné $n \in \mathbb{N}$, tout élément de $I \cap M^{\otimes n}$ est somme d'éléments de la forme*

$$m_1 \otimes \cdots \otimes m_p \otimes m \otimes m \otimes m_{p+1} \otimes \cdots \otimes m_{p+q},$$

où $p + q + 2 = n$, $m \in M$, $m_i \in M$ pour $i = 1, \ldots, p + q$.

Démonstration : Un élément de $z \in I$ est de la forme $z = \sum_{i=1}^{n} x_i.(m_i \otimes m_i).y_i$, où $m_i \in M$, $x_i, y_i \in \bigotimes M$, $i = 1, \ldots, n$. Comme les x_i et y_i s'écrivent eux-mêmes comme somme d'éléments décomposables, on peut supposer que les x_i et y_i sont décomposables. Enfin, si $x \in M^{\otimes p}$, $y \in M^{\otimes q}$ on a $x.(m \otimes m).y \in M^{p+q+2}$, ce qui donne le résultat. $\square$

Proposition 4. 63 *On a*

$$\bigwedge M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge^n M.$$

Démonstration : On a $\sum_n \bigwedge^n M = \sum_n (I + M^{\otimes n})/I = (\sum_n M^{\otimes n})/I = \bigotimes M/I = \bigwedge M$. Nous allons voir que la somme est directe. Soient $n \in \mathbb{N}$, $\bar{x} \in (I + M^{\otimes n})/I \cap \sum_{p \neq n} (I + M^{\otimes p})/I$ et x un représentant de $\bar{x}$. Alors, il existe $a, b \in I$ tels que $x - a \in M^{\otimes n}$ et $x - b \in \sum_{p \neq n} M^{\otimes p}$. D'après (62), il existe une partie finie $P \subset \mathbb{N}$ telle que

$$x = \sum_{p \in P} x_p, \quad a = \sum_{p \in P} a_p, \quad b = \sum_{p \in P} b_p,$$

où $x_p \in M^{\otimes p}$, $a_p \in I \cap M^{\otimes p}$, et $b_p \in I \cap M^{\otimes p}$, pour tout $p \in P$. Comme $\bigotimes M$ est une somme directe, $x_p = a_p$ pour tout $p \neq n$ et $x_n = b_n$, donc $x \in I$. Cela signifie que $(I + M^{\otimes n}) \cap \sum_{p \neq n} (I + M^{\otimes p}) \subset I$ et donc

$$(I + M^{\otimes n})/I \cap \sum_{p \neq n} (I + M^{\otimes p})/I = 0.$$

$\square$

Définition 4. 64 *Un élément $x \in \bigwedge^n M$ est appelé un* **multivecteur de degré *n*** *ou* ***n*-vecteur**. *Un élément $x \in \bigwedge M$ est appelé* **multivecteur** *s'il existe $n \geq 0$ tel que $x \in \bigwedge^n M$. Un multivecteur est* **décomposable** *s'il est non nul et s'il appartient à A ou est de la forme $m_1 \wedge \cdots \wedge m_n$ pour $n \geq 1$ et $m_i \in M$, $i = 1, \ldots, n$. Tout élément de $\bigotimes M$ étant somme d'éléments décomposables, tout élément de $\bigwedge M$ est somme de multivecteurs décomposables.*

Pour tout $n \geq 0$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & M^n \arrow[dl, "\Phi_n"'] \arrow[dr, "\Psi_n"] & \\ M^{\otimes n} \arrow[rr, "p_n"] & & \bigwedge^n M \end{tikzcd}$$

où Φ_n, Ψ_n et p_n sont les applications canoniques, $p_n(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) = m_1 \wedge \cdots \wedge m_n$. Puisque Φ_n est n-linéaire, il en est de même pour Ψ_n. De plus, pour toute suite $(m_1, \ldots, m_n) \in M^n$ dont deux termes sont égaux, $\Psi(m_1, \ldots, m_n) = 0$, donc Ψ_n est n-linéaire alternée. Le produit extérieur a donc les propriétés suivantes :

1. Pour toute suite d'éléments $(m_1, \ldots, m_n) \in M^n$, et tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

$$m_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge m_{\sigma(n)} = \epsilon(\sigma) m_1 \wedge \cdots \wedge m_n.$$

   En particulier, si deux éléments sont égaux, $m_1 \wedge \cdots \wedge m_n = 0$.

2. Pour tout $a \in A$, tout $x \in \bigwedge M$, on a

$$a \wedge x = ax = x \wedge a.$$

Proposition 4. 65 *Soient $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $x \in \bigwedge^p M$, $y \in \bigwedge^q M$. Alors, on a*

1. $x \wedge y = (-1)^{pq} y \wedge x$,

2. Si p *est impair,* $x \wedge x = 0$.

Démonstration : 1) On peut supposer que x et y sont décomposables. Si p ou q est nul le résultat est évident, supposons donc que $p > 0$ et $q > 0$. Pour $x = m_1 \wedge \cdots \wedge m_p$ et $y = m_{p+1} \wedge \cdots \wedge m_{p+q}$, on a

$$\begin{array}{rcl} x \wedge y & = & (m_1 \wedge \cdots \wedge m_p) \wedge (m_{p+1} \wedge \cdots \wedge m_{p+q}) \\ & = & (-1)^{pq} (m_{p+1} \wedge \cdots \wedge m_{p+q}) \wedge (m_1 \wedge \cdots \wedge m_p) \\ & = & (-1)^{pq} y \wedge x. \end{array}$$

2) Tout p-vecteur $x \in \bigwedge^p M$ est de la forme $x = \sum_{i=1}^n x_i \wedge m_i$, où $x_i \in \bigwedge^{p-1} M$ et $m_i \in M$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on a d'après 1),

$$x_i \wedge m_i \wedge x_i \wedge m_i = (-1)^{p-1} x_i \wedge m_i \wedge m_i \wedge x_i = 0.$$

et pour $i \neq j$,

$$(x_j \wedge m_j) \wedge (x_i \wedge m_i) = (-1)^{p^2} (x_i \wedge m_i) \wedge (x_j \wedge m_j) = -(x_i \wedge m_i) \wedge (x_j \wedge m_j).$$

D'où

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \wedge m_i \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^n x_j \wedge m_j \right) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} [(x_i \wedge m_i) \wedge (x_j \wedge m_j) + (x_j \wedge m_j) \wedge (x_i \wedge m_i)] = 0.$$

□

Proposition 4. 66 *Supposons que* M *soit engendré par une famille à* n *éléments* $\{m_1, \ldots, m_n\}$. *Alors, pour tout* $p > n$ *on a* $\bigwedge^p M = 0$ *et* $\bigwedge M$ *est un* A*-module de type fini engendré par la famille* $(m_{i_1} \wedge \cdots \wedge m_{i_p})_{i_1 < \cdots < i_p}$.

Démonstration : Soit $(m_1, \ldots, m_n)$ une famille génératrice. Tout élément de $\bigwedge^p M$ est une combinaison linéaire d'éléments de la forme $m_{i_1} \wedge \cdots \wedge m_{i_p}$. Si $p > n$ un tel produit extérieur doit contenir deux fois le même élément, il est donc nul. Pour $p \leq n$, $\bigwedge^p M$ est engendré par les éléments de la forme $m_{i_1} \wedge \cdots \wedge m_{i_p}$ où $i_1 < \cdots < i_p$, ils sont donc en nombre fini. □

Théorème 4. 67 (Propriété universelle du produit extérieur)
Soit $\Psi_n : M^n \to \bigwedge^n M$ *l'application canonique. Alors* $(\Psi_n, \bigwedge^n M)$ *a la propriété suivante : Pour tout* A*-module* N *et toute application* n*-linéaire alternée*

$$F : M^n \to N,$$

il existe une unique application linéaire $f : \bigwedge^n M \to N$ *telle que le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} & M^n \arrow[dl, "\Psi_n"'] \arrow[dr, "F"] & \\ \bigwedge^n M \arrow[rr, "f"] & & N \end{tikzcd}$$

soit commutatif. On a un isomorphisme de A*-modules*

$$\begin{array}{ccc} Hom_A(\bigwedge^n M, N) & \to & \mathcal{A}lt^n(M, N) \\ f & \mapsto & f \circ \Psi_n \end{array}$$

Démonstration : Si $F : M^n \to N$ est n-linéaire alternée, la propriété universelle du produit tensoriel donne un factorisation de F à travers $M^{\otimes n}$. Comme F s'annule sur $I \cap M^{\otimes n}$, F se factorise à travers $\bigwedge^n M$. $\square$

Corollaire 4. 68 *Soit B une A-algèbre et $u : M \to B$ une application linéaire telle que pour tout $m \in M$ on ait $u(m)^2 = 0$. Alors, il existe un unique morphisme de A-algèbres $\psi : \bigwedge M \to B$ tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\Psi"'] \arrow[dr, "u"] & \\ \bigwedge M \arrow[rr, "\psi"] & & B \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Démonstration : D'après la propriété universelle de l'algèbre tensorielle, u se prolonge à $\bigotimes M$ de façon unique en $U : \bigotimes M \to B$. Soit $J = \operatorname{Ker} U$ son noyau. Comme $U(m \otimes m) = u(m)^2 = 0$, $I \subset J$, donc U passe au quotient pour donner ψ. $\square$

Proposition 4. 69 (Fonctorialité) *Soit M et N des A-modules, $(\Psi_M, \bigwedge M)$ et $(\Psi_N, \bigwedge N)$ les algèbres extérieures de M et N. Pour toute application linéaire $u : M \to N$, il existe un unique morphisme d'algèbres, noté $\bigwedge u : \bigwedge M \to \bigwedge N$, appelé le* **morphisme d'algèbres extérieures associé à u** *tel que le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\Psi_M"'] & N \arrow[d, "\Psi_N"] \\ \bigwedge M \arrow[r, "\bigwedge u"] & \bigwedge N \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Pour tout $(m_1, \ldots, m_n) \in M^n$,

$$\bigwedge u(m_1 \wedge \cdots \wedge m_n) = u(m_1) \wedge \cdots \wedge u(m_n).$$

2) Soit $v : N \to P$ une autre application linéaire. Alors,

$$\bigwedge (v \circ u) = \bigwedge v \circ \bigwedge u.$$

Démonstration : Pour tout $m \in M$, $\big(\Psi_N \circ u(m)\big)^2 = u(m) \wedge u(m) = 0$. D'après (68), il existe une unique application linéaire $\bigwedge u$ faisant commuter le diagramme qui sur un élément décomposable $m_1 \wedge \cdots \wedge m_n$ a la propriété voulue. Si $v : N \to P$ est une autre application linéaire, $\bigwedge v \circ \bigwedge u$ vérifie la relation $\Psi_P \circ (v \circ u) = (\bigwedge v \circ \bigwedge u) \circ \Psi_M$. D'après l'unicité $\bigwedge (v \circ u) = \bigwedge v \circ \bigwedge u$. $\square$

Exercice 4. 70 *1) Soient $i_n : \bigwedge^n M \to \bigwedge M$ et $j_n : \bigwedge^n N \to \bigwedge N$ les injections canoniques. Montrer que pour toute application linéaire $u : M \to N$*

$$\bigwedge u \circ \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} i_n = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (j_n \circ \bigwedge^n u).$$

2) Montrer que pour deux applications linéaires $u : M \to N$ et $v : N \to P$, et tout $n \geq 0$,

$$\bigwedge^n (v \circ u) = (\bigwedge^n v) \circ (\bigwedge^n u).$$

Proposition 4. 71 *Soit $u : M \to N$ une application linéaire.*

1. *Si u est surjectif, alors pour tout $n \geq 0$, $\bigwedge^n u : \bigwedge^n M \to \bigwedge^n N$ est surjectif ainsi que $\bigwedge u : \bigwedge M \to \bigwedge N$.*
2. *Si u est bijectif, alors pour tout $n \geq 0$, $\bigwedge^n u : \bigwedge^n M \to \bigwedge^n N$ est bijectif ainsi que $\bigwedge u : \bigwedge M \to \bigwedge N$. De plus,*

$$(\bigwedge u)^{-1} = \bigwedge(u^{-1}), \quad \text{et} \quad (\bigwedge^n u)^{-1} = \bigwedge^n (u^{-1}).$$

3. *Si u est injectif et $\operatorname{Im} u$ admet un supplémentaire dans N, alors $\bigwedge^n u$ (resp. $\bigwedge u$) est injectif et $\operatorname{Im}(\bigwedge u)$ (resp. $\operatorname{Im}(\bigwedge^n u)$) admet un supplémentaire dans $\bigwedge N$ (resp. $\bigwedge^n N$).*

Démonstration : 1) Soient $p_M : \bigotimes M \to \bigwedge M$, $p_N : \bigotimes N \to \bigwedge N$ les applications canoniques. D'après (58), $\otimes u$ est surjectif, donc $p_N \circ \otimes u$ est composé d'applications surjectives. La commutativité de

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes M \arrow[r, "\otimes u"] \arrow[d, "p_M"'] & \bigotimes N \arrow[d, "p_N"] \\
\bigwedge M \arrow[r, "\bigwedge u"] & \bigwedge N
\end{tikzcd}$$

entraine la surjectivité de $\bigwedge u$. On montre de la même façon que $\bigwedge^n u$ est surjective.
2) résulte de (69) 2).
3) Puisqu'il existe r tel que $r \circ u = Id_M$, alors $(\bigwedge r) \circ (\bigwedge u) = \bigwedge Id_M = Id_{\bigwedge M}$. On a également $(\bigwedge^n r) \circ (\bigwedge^n u) = \bigwedge^n Id_M = Id_{\bigwedge^n M}$. □

Exemple 4. 72 Une application injective dont le produit extérieur n'est pas injectif : Soient $M = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, et $j : M^2 \to N^2$ l'injection canonique. Pour tous $(\epsilon, \epsilon') \in N^2$ et $(\eta, \eta') \in N^2$,

$$(2\epsilon, 2\epsilon') \wedge (2\eta, 2\eta') = (4\epsilon, 4\epsilon') \wedge (\eta, \eta') = 0,$$

donc $\bigwedge^2 j(\bigwedge^2 (M^2)) = 0$. Cependant, les $\mathbb{Z}$-modules $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et M sont isomorphes et l'application bilinéaire alternée

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 & \to & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \big((a,b),(c,d)\big) & \mapsto & ad - bc \end{array}$$

est non nulle. Comme elle se factorise à travers $\bigwedge^2 (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, ce module est non nul ainsi que $\bigwedge^2 M^2$. On en déduit que $\bigwedge^2 j$, et à fortiori $\bigwedge j$, sont non injectifs. Remarquons que si M est un sous-module de N, la notation $m_1 \wedge \cdots \wedge m_n$ est ambigue, il faut préciser si $m_1 \wedge \cdots \wedge m_n \in \bigwedge^n M$ ou $m_1 \wedge \cdots \wedge m_n \in \bigwedge^n N$. Dans l'exemple ci-dessus, $(2\epsilon, 2\epsilon') \wedge (2\eta, 2\eta') \in \bigwedge^2 M$ est non nul mais $(2\epsilon, 2\epsilon') \wedge (2\eta, 2\eta') \in \bigwedge^2 N$ est nul. Cette ambiguité disparait lorsqu'on a des sous-espaces vectoriels puisque tout sous-espace admet un supplémentaire et donc $\bigwedge^n M$ est un sous-espace vectoriel de $\bigwedge^n N$.

4.1 Algèbre extérieure d'un module libre

Dans cette section, A est un anneau commutatif, M un A-module libre de type fini de dimension m dont on note $(e_1, \ldots, e_m)$ une base.

Notations 4. 73 *Notons* $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\{1, \dots, m\})$ *l'ensemble des parties de* $\{1, \dots, m\}$ *et* $\mathcal{P}_p$ *l'ensemble des parties à* p *éléments. Pour tout* $H \in \mathcal{P}$*, on pose*

$$e_H = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p},$$

où $i_1, \dots, i_p$ *sont les éléments de* H *rangés dans l'ordre croissant.*
Si $H \cap K = \emptyset$*, on pose* $\rho_{H,K} = (-1)^\nu$ *où* ν *est le nombre de couples* $(i, j) \in H \times K$ *tels que* $i > j$*. Si* $H \cap K \neq \emptyset$*, on pose* $\rho_{H,K} = 0$*.*

Théorème 4. 74 *La famille* $(e_H)_{H \in \mathcal{P}}$ *est une base de* $\bigwedge M$*.*

Démonstration : D'après (66), $\bigwedge M$ est engendré par la famille (e_H) ; on va voir que cette famille est libre. Soit $\sum_{H \in \mathcal{P}} a_H e_H = 0$ une combinaison linéaire. Comme $\bigwedge M$ est somme directe des $\bigwedge^p M$ (63), la condition

$$\sum_{H \in \mathcal{P}} a_H e_H = \sum_{p \in \mathbb{N}} \sum_{H \in \mathcal{P}_p} a_H e_H = 0$$

entraine que pour tout $p \geq 0$,

$$\sum_{H \in \mathcal{P}_p} a_H e_H = 0.$$

Fixons $H_0 = \{i_1, \dots, i_p\} \in \mathcal{P}_p$; on sait qu'il existe une unique forme p-linéaire alternée $F : M^p \to A$ telle que

$$F(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) = 1, \quad \text{et} \quad \forall H, H \neq H_0, F(e_H) = 0.$$

D'après (67), il existe une unique application linéaire $f : \bigwedge^p M \to A$

$$\begin{tikzcd} & M^p \arrow[dl, "\Psi_p"'] \arrow[dr, "F"] & \\ \bigwedge M^p \arrow[rr, "f"] & & A \end{tikzcd}$$

telle que pour tout $\{e_{j_1}, \dots, e_{j_p}\} \in \mathcal{P}_p$, $f(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p}) = F(e_{j_1}, \dots, e_{j_p})$. Alors

$$a_{H_0} = a_{H_0} f(e_{H_0}) = f(\sum_{H \in \mathcal{P}_p} a_H e_H) = 0.$$

□

Corollaire 4. 75 *1) Pour tout* $0 \leq p \leq m$*, le* A*-module* $\bigwedge^p M$ *est libre de dimension* $\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}$ *et* $(e_H)_{H \in \mathcal{P}_p}$ *est une base de* $\bigwedge^p M$*. En particulier,* $\bigwedge^m M$ *est de dimension 1, de base* $e_1 \wedge \cdots \wedge e_m$*.*
2) Le A*-module* $\bigwedge M$ *est libre de dimension* 2^m*.*
3) Pour tous $H, K \in \mathcal{P}$*,* $e_H \wedge e_K = \rho_{H,K} e_{H \cup K}$*.*

Démonstration : 1) est une conséquence immédiate de (74).
2) On a vu que si $p > m$, $\bigwedge^p M = 0$, l'assertion résulte donc de 1) et de l'égalité

$$\sum_{p=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} = 2^m.$$

3) Notons $H = \{i_1, \dots, i_p\}$, $K = \{j_1, \dots, j_q\}$ où les éléments i_k et j_l sont rangés dans l'ordre croissant. Si $H \cap K \neq \emptyset$ l'égalité est évidente, sinon elle résulte du fait que $\rho_{H,K}$ est la signature de la permutation qui place les éléments de $\{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q\}$ dans l'ordre croissant. □

Théorème 4. 76 *Soit N un A-module libre. Alors, pour tout $p \geq 0$, $\bigwedge^p N$ est libre ainsi que $\bigwedge N$.*

Démonstration : Soit $(f_i)_{i\in I}$ une base de N. Notons $\mathcal{F} = \mathcal{F}(I)$ l'ensemble des parties finies de I et $\mathcal{F}_p = \mathcal{F}_p(I)$ l'ensemble des parties à p éléments. Pour $H = \{i_1, \dots, i_p\} \in \mathcal{F}_p$, on note

$$f_H = f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_p}.$$

Pour montrer que $(f_H)_{H\in\mathcal{F}}$ est une base de $\bigwedge N$, il suffit de montrer que pour tout $p \geq 0$, $(f_H)_{H\in\mathcal{F}_p}$ est une base de $\bigwedge^p N$. Tout $x \in \bigwedge^p N$ est une combinaison linéaire d'éléments décomposables $m_1 \wedge \cdots \wedge m_p$, où $m_j \in N$, $j = 1, \dots, p$. Or pour tout j, il existe une partie finie $K_j \in \mathcal{F}$ telle que

$$m_j = \sum_{i\in K_j} a_{j,i} f_i.$$

On en déduit que la famille $(f_H)_{H\in\mathcal{F}_p}$ est génératrice. Montrons qu'elle est libre. Considérons une relation

$$\sum_{H\in J} a_H f_H = 0,$$

où J est une partie finie de $\mathcal{F}_p$. Soit $L = \cup_{H\in J} H$ c'est une partie finie de I. Soit M le sous-module de N de base $(f_i)_{i\in L}$. Si $m = \mathrm{Card}\ L$, M est libre de dimension m et par construction M a un supplémentaire dans N qui est le sous-module de base $(f_i)_{i\in I\setminus L}$. Notons $i : M \to N$ l'injection canonique ; la proposition (71) assure que $\bigwedge^p i : \bigwedge^p M \to \bigwedge^p N$ reste injective, c'est-à-dire $\bigwedge^p M$ est un sous-module de $\bigwedge^p N$. D'après le corollaire (75), $(f_H)_{H\in\mathcal{F}_p(L)}$ est une base de $\bigwedge^p M$. Comme par définition de L, $J \subset \mathcal{F}_p(L)$, $a_H = 0$ pour tout $H \in J$. $\square$

Lemme 4. 77 *Soit N un A-module libre, et $x_1, \dots, x_n$ des éléments de N. Alors, $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n = 0$ si et seulement si pour toute forme n-linéaire alternée $F : N^n \to A$, on a $F(x_1, \dots, x_n) = 0$.*

Démonstration : La condition est nécessaire d'après (67).
Supposons $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \neq 0$. D'après (76), $\bigwedge^n N$ est libre, donc l'application canonique $c : \bigwedge^n N \to (\bigwedge^n N)^{\star\star}$ est injective, et $c(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) \neq 0$ est une forme linéaire non nulle sur $(\bigwedge^n N)^\star$. On en déduit qu'il existe $g \in (\bigwedge^n N)^\star$ telle que

$$\langle g, c(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n)\rangle = \langle x_1 \wedge \cdots \wedge x_n, g\rangle = g(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) \neq 0.$$

Par (67) on obtient une forme n-linéaire alternée $F : N^n \to A$ telle que

$$F(x_1, \dots, x_n) = g(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) \neq 0.$$

$\square$

Lemme 4. 78 *Soient N un A-module, $n \geq 1$, et $F : N^n \to A$ une forme n-linéaire alternée. Pour tout $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in N^{n+1}$ tel que $x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n+1} = 0$, on a*

$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) = 0.$$

Démonstration : On définit une application $(n+1)$-linéaire $G : N^{n+1} \to N$ en posant pour tout $(y_1, \dots, y_{n+1}) \in N^{n+1}$,

$$G(y_1, \dots, y_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i F(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_{n+1}) y_i.$$

De plus, pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} G(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_i, y_i, y_{i+2}, \ldots, y_{n+1}) &= (-1)^i F(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_i, y_{i+2}, \ldots, y_{n+1}) y_i \\ &\quad +(-1)^{i+1} F(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_i, y_{i+2}, \ldots, y_{n+1}) y_i \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc G est alternée et d'après (67), $G(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0$. □

Théorème 4. 79 *Soient N un A-module libre et $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de N. Pour que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ soit libre il faut et il suffit que pour tout élément $a \neq 0$ de A on ait*

$$ax_1 \wedge \cdots \wedge x_n \neq 0.$$

Démonstration : ($\Longrightarrow$) On démontre l'implication contraposée par récurrence sur $n \geq 1$. Si $n = 1$, $ax_1 = 0$, donc x_1 n'est pas libre. Supposons $n \geq 2$ et qu'il existe $a \neq 0$ tel que $ax_1 \wedge \cdots \wedge x_n = 0$.

– Si $ax_2 \wedge \cdots \wedge x_n = 0$, l'hypothèse de récurrence montre que la famille $(x_2, \ldots, x_n)$ est liée, à fortiori il en est de même pour $(x_1, \ldots, x_n)$.
– Si $(ax_2) \wedge x_3 \wedge \cdots \wedge x_n \neq 0$, le lemme (77) donne un forme $(n-1)$-linéaire alternée $F : N^{n-1} \to A$ telle que $F(ax_2, x_3, \ldots, x_n) \neq 0$. Mais puisque $x_1 \wedge (ax_2) \wedge x_3 \wedge \cdots \wedge x_n = 0$, le lemme (78) montre que

$$\begin{aligned} F(ax_2, x_3, \ldots, x_n) x_1 &= F(x_1, x_3, \ldots, x_n) ax_2 \\ &\quad + \textstyle\sum_{i=3}^n (-1)^i F(x_1, ax_2, x_3, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) x_i. \end{aligned}$$

On en déduit que $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille liée.

($\Longleftarrow$) On démontre à nouveau l'implication contraposée : supposons qu'il existe une relation non triviale

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$$

où j est un indice pour lequel $a_j \neq 0$. Alors $a_j x_j = -\sum_{i \neq j} a_i x_i$ et

$$ax_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n = 0.$$

□

Lemme 4. 80 *Soient $(x_1, \ldots, x_m) \in M^m$ une suite de $m = \dim M$ éléments de M. Alors on a*

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_m = \det_{(e_1, \ldots, e_n)}(x_1, \ldots, x_m) e_1 \wedge \cdots \wedge e_m.$$

Démonstration : L'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 \wedge \cdots \wedge x_m$ est m-linéaire alternée. Cela résulte donc du lemme 81 suivant : □

Lemme 4. 81 *Soit M un A-module libre de dimension n, muni d'une base $(x_1, \ldots, x_n)$, et soit $\varphi : M^n \to A$ une forme n-linéaire alternée. Alors pour tout $(y_1, \ldots, y_n) \in M^n$ on a*

$$\varphi(y_1, \ldots, y_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_n) \det_{(x_1, \ldots, x_n)}(y_1, \ldots, y_n).$$

En particulier, le A-module $\mathcal{L}^n(M)$ des formes n-linéaires est libre de rang 1.

Théorème 4. 82 *Une suite $(x_1, \ldots, x_m)$ d'éléments de M est une base de M, si et seulement si $\det_{(e_1, \ldots, e_m)}(x_1, \ldots, x_m)$ est un élément inversible de A.*

Démonstration : D'après (75), $\bigwedge^m M$ est de dimension 1 et admet pour base $e_1 \wedge \cdots \wedge e_m$.
($\Longrightarrow$) Si $(x_1, \ldots, x_m)$ est une base, (80) implique

$$\begin{aligned} e_1 \wedge \cdots \wedge e_m &= \det_{(x_1,\ldots,x_m)}(e_1, \ldots, e_m)\, x_1 \wedge \cdots \wedge x_m \\ &= \det_{(x_1,\ldots,x_m)}(e_1, \ldots, e_m) \det_{(e_1,\ldots,e_m)}(x_1, \ldots, x_m)\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_m, \end{aligned}$$

donc $\det_{(x_1,\ldots,x_m)}(e_1, \ldots, e_m) \det_{(e_1,\ldots,e_m)}(x_1, \ldots, x_m) = 1$.

($\Longleftarrow$) Posons $a = \det_{(e_1,\ldots,e_m)}(x_1, \ldots, x_m)$ et supposons a inversible. D'après (75), il existe une unique forme linéaire $f : \bigwedge^m M \to A$ telle que $f(e_1 \wedge \cdots \wedge e_m) = a^{-1}$, donc d'après (67) une unique forme m-linéaire alternée $F : M^n \to A$ telle que

$$F(e_1, \ldots, e_m) = a^{-1}.$$

On en déduit par (I.81) que

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \det_{(e_1,\ldots,e_m)}(x_1, \ldots, x_m) F(e_1, \ldots, e_m) = 1.$$

Pour tout $x \in M$, $x \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_m = 0$, et bien sûr $x = F(x_1, \ldots, x_m)x$; le lemme (78) entraine alors que x est combinaison linéaire de $x_1, \ldots, x_m$, donc $(x_1, \ldots, x_m)$ est une famille génératrice. D'autre part,

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_m = a\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_m \neq 0$$

donc pour tout $b \neq 0$, $b\, x_1 \wedge \cdots \wedge x_m \neq 0$. On conclut par le théorème (79) que $(x_1, \ldots, x_m)$ est libre, ce qui achève la démonstration. □

5 Tenseurs sur une variété différentiable

5.1 Fibrés sur une variété différentielle

Les variétés différentielles de classe $\mathcal{C}^\infty$, sont supposées paracompactes et en général connexes. Avec les applications différentiables entre ces objets, on obtient une catégorie. Soit $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert d'une variété différentielle M de dimension n par des domaines de cartes $f_i : U_i \to V_i := f(U_i) \subset \mathbb{R}^n$, où V_j est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Notons pour tous $i, j \in I$, $U_{ij} = U_i \cap U_j$,

$$f_{ij} = f_i \circ f_j^{-1} : f_j(U_{ij}) \to f_i(U_{ij})$$

les changements de cartes. On a pour tous i, j, k, sur $U_{ijk} := U_i \cap U_j \cap U_k$, la relation de cocycle

$$(C) \qquad f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk}.$$

Les cartes permettent d'identifier, par un isomorphisme, la variété M avec la variété

$$\coprod_{i \in I} V_i / \sim$$

où $\sim$ est l'identification $f_{ij} : f_j(U_{ij}) \to f_i(U_{ij})$.
La structure de variété différentielle est défini par l'atlas maximal, i.e. la donnée de toutes les cartes compatibles, elle est donc indépendante du choix des cartes.
En dérivant la relation (C) on obtient pour $x \in f_k(U_{ijk})$

$$Df_{ik}(x) = Df_{ij}(f_{jk}(x)) \circ Df_{jk}(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

où $y = f_k^{-1}(x) = f_j^{-1}(f_{jk}(x) \in M$, c'est-à-dire x et $f_{jk}(x)$ représentent le même point dans la variété M. Ceci permet d'obtenir le fibré tangent TM par recollement des fibrés triviaux $V_i \times \mathbb{R}^n$,

$$\begin{array}{rccc} g_{ij}: & f_j(U_{ij}) \times \mathbb{R}^n & \to & f_i(U_{ij}) \times \mathbb{R}^n \\ & (x, \lambda) & \mapsto & \big(f_{ij}(x), Df_{ij}(x).\lambda\big) \end{array}$$

ou plus simplement $U_i \times \mathbb{R}^n$ après identification, où on convient que $U_{ij} \subset U_i$, $U_{ji} \subset U_j$,

$$\begin{array}{rccc} G_{ij}: & U_{ji} \times \mathbb{R}^n & \to & U_{ij} \times \mathbb{R}^n \\ & (x, \lambda) & \mapsto & G_{ij}(x, \lambda) = (x, g_{ij}(x).\lambda) := \big(x, Df_{ij}(x).\lambda\big) \end{array}$$

On a la relation de cocycle $g_{ik}(x) = g_{ij}(x) \circ g_{jk}(x)$ et $(g_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, Gl(n, \mathbb{R}))$, le groupe des cocycles à valeurs dans le groupe linéaire, $g_{ij} : U_{ij} \to Gl(n, \mathbb{R})$, $x \mapsto Df_{ij}(x)$.
Le fibré cotangent $T^\star M$, dual de TM est défini par le cocycle (h_{ij}) où $h_{ij} := {}^t g_{ij}^{-1}$. On a le crochet de dualité canonique

$$TM \times_M T^\star M \to M \times \mathbb{R}, \quad (x, \lambda, a) \mapsto (x, \langle \lambda, a \rangle),$$

Exercice 5. 83 *Montrer que ce crochet de dualité est bien canonique, c'est-à-dire ne dépend pas du choix des cartes.*

Plus généralement, un fibré vectoriel (E, p, M) de rang r sur M est la donnée d'un recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ et d'un cocycle $(g_{ij})_{i,j \in I}$ à valeurs dans $Gl(r, \mathbb{R})$, i.e. d'applications différentiables $g_{ij} : U_{ij} \to Gl(r, \mathbb{R})$, $x \mapsto g_{ij}(x)$ qui vérifient pour tous $i, j, k \in I$

$$g_{ii} = Id_{\mathbb{R}^r}, \qquad \forall x \in U_{ijk}, \quad g_{ik}(x) = g_{ij}(x) \circ g_{jk}(x).$$

Un tel cocycle permet de recoller les fibrés triviaux $U_i \times \mathbb{R}^r$ en une variété E munie d'une application différentiable $p : E \to M$ et telle que pour tout $x \in M$, $E_x = p^{-1}(x)$ est muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Etant donnés deux fibrés (E, p, M) et (F, q, M) sur M de rang respectivement r et s, de cocycles (g_{ij}) et (h_{ij}) sur un même recouvrement ouvert $\mathfrak{U}$ de M, on définit le produit tensoriel $(E \otimes F, p \otimes q, M)$ des deux fibrés sur M le fibré de rang rs associé au cocycle $(g_{ij} \otimes h_{ij})_{i,j \in I}$.
Pour tout $m \geq 0$ on définit $(\bigwedge^m E, \wedge p, M)$ par le cocycle $(\wedge^m g_{ij})$.

5.2 Tenseurs, formes différentielles

On note

$$T^{r,s}M = \bigotimes^r T^\star M \otimes \bigotimes^s TM$$

le fibré vectoriel des tenseurs r fois covariants et s fois contravariants. En particulier $T^{0,1}M$ est le fibré tangent TM et $T^{1,0}M$ est le fibré cotangent $T^\star M$ dual du fibré tangent. On note $\bigwedge^s M = \bigwedge^s (T^\star M)$ le fibré des s-formes différentielles sur M. Pour tout fibré réel (resp. complexe) (E, p, M) sur M on notera $\Gamma(E) = \Gamma(M, E)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel (resp. $\mathbb{C}$-espace vectoriel) des sections différentiables $\sigma : M \to E$ de E, sauf l'espace des fonctions différentiables sur M (i.e. les sections du fibré trivial de rang 1) qu'on notera $\mathcal{C}M = \mathcal{C}^\infty M$, ou $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}M$ si on veut préciser dans quel corps les fonctions prennent leurs valeurs. L'espace des **champs de vecteurs** sur un ouvert $U \subset M$ est $\Gamma(U, TM)$ et celui des **formes différentielles** $\Gamma(U, T^\star M)$. On notera l'espace des p-formes différentielles $A^p(M) = \Gamma(\bigwedge^s (T^\star M))$ (donc $A^1(M) = \Gamma(M, T^\star M)$) et plus généralement $A^p(E) = \Gamma(E \otimes \Lambda^p M)$ les p-formes différentielles à valeurs dans le fibré vectoriel E.
Les produits tensoriels de fibrés vectoriels sont sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ suivant que l'on considère des fibrés réels ou complexes.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera simplement un fibré E. Si E et F sont deux fibrés vectoriels au dessus de M, $Hom(E,F)$ sont les morphismes de fibrés entre E et F au dessus de M, en particulier $E^\star = Hom_{\mathbb{K}}(E,\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Dans la suite, si on ne précise pas, les fibrés peuvent être réels ou complexes.
Soit (E,p,M) est un fibré réel de rang r sur M, $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de M sur lequel (E,p,M) se trivialise. Soit (g_{ij}) un cocycle associé à (E,p,M),

$$g_{ij} : U_{ij} \to GL(r,\mathbb{R})$$

on peut associer à E un fibré complexe $(E_{\mathbb{C}}, p_{\mathbb{C}}, M)$ de rang r sur $\mathbb{C}$ en posant $E_{\mathbb{C}} = E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, où $\mathbb{C}$ désigne le fibré (complexe) trivial sur M ; il admet (g_{ij}) pour cocycle en considérant $GL(r,\mathbb{R})$ comme un sous-groupe de $GL(r,\mathbb{C})$. Inversement, si (E,p,M) est un fibré complexe de rang (complexe) r, de cocycle $g_{ij} : U_{ij} \to GL(r,\mathbb{C})$, il porte une structure de fibré réel de rang (réel) $2r$ en considérant $GL(r,\mathbb{C})$. comme un sous-groupe de $GL(2r,\mathbb{R})$ à l'aide de l'isomorphisme de corps

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & M(2,\mathbb{R}) \\ \alpha + i\beta & \to & \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \end{array}$$

5.3 Incursion en géométrie riemannienne

Définition 5. 84 *a) Une* **métrique riemannienne** *sur une variété différentiable M est un morphisme de fibrés $g : TM \times TM \to \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in M$, $g_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ soit un produit scalaire i.e. une forme bilinéaire symétrique définie positive. On appelera* **variété riemannienne** *une variété munie d'une métrique riemannienne. On la notera (M,g). On appelle* **repère orthonormal** *sur un ouvert U un repère $s = (s_1,\dots,s_n)$ tel qu'en tout point $x \in U$, on ait pour tous $1 \le i,j \le n$,*

$$g_x(s_i,s_j) = \delta_{ij}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.
Plus généralement un fibré (E,p,M) a une **structure riemannienne** *s'il est muni d'une métrique riemannienne.*

Une métrique riemannienne est un tenseur symétrique de type (2,0). A l'aide la métrique on calcule des longueurs de courbes $\gamma : [0,1] \to M$. On définit la longueur de γ par

$$l(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t),\gamma'(t))} dt.$$

Lemme 5. 85 *Tout fibré (E,p,M) peut être muni d'une métrique riemannienne.*

Démonstration : Soit $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ un recouvrement par des ouverts munis de cartes locales $\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$. On note g_0 la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^r$ et notons $g_\alpha = \varphi_\alpha^\star g_0$. Si (θ_α) est une partition de l'unité, on pose

$$g = \sum_\alpha \theta_\alpha g_\alpha.$$

Il est immédiat que g est bilinéaire symétrique définie positive. □

Lemme 5. 86 *Le fibré tangent d'une variété riemannienne (M,g) admet un cocycle à valeurs dans le groupe orthogonal $O(n,\mathbb{R})$. Réciproquement si $(g_{\alpha\beta})$ est un cocycle du fibré tangent à valeurs dans $O(n,\mathbb{R})$, il existe une métrique riemannienne g telle que pour toute trivialisation locale $\varphi_\alpha : TM_{|U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$, $(\varphi_\alpha)_\star g$ soit la métrique euclidienne.*
Si de plus la variété est orientable, alors on peut choisir le cocycle à valeurs dans $SO(n,\mathbb{R})$.

Démonstration : L'existence de repères locaux orthonormaux résulte de l'orthonormalisation de Schmidt. D'autre part la classification des formes quadratiques montre que pour toute trivialisation locale l'image d'un repère orthonormal est un repère ortonormal pour la métrique euclidienne, donc $g_{\alpha\beta}$ est à valeurs dans $O(n)$.
Réciproquement si on a un cocycle dans $O(n)$, on transporte la métrique euclidienne comme dans le lemme précédent. $\square$

Exemple 5. 87 1) Notons g_0 la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, alors $(\mathbb{R}^n, g_0)$ est la **structure riemannienne plate** sur $\mathbb{R}^n$.
2) Si (M, g) est une variété riemannienne et $i : N \to M$ est une immersion, alors $i^\star g$ est une métrique riemannienne sur N. On appelle **sous-variété riemannienne** une sous-variété munie de la métrique induite.
3) Si (M, g) et (M', g') sont deux variétés riemanniennes, alors on fait de $M \times M'$ une variété riemannienne en définissant sur le fibré tangent $T(M \times M') = TM \oplus TM'$ la **métrique produit**

$$g \oplus g' = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g' \end{pmatrix}.$$

Les connexions généralisent aux sections des fibrés la différentiation extérieure des fonctions.

Définition 5. 88 *Soit (E, p, M) un fibré linéaire sur M. On appelle connexion sur E une application K-linéaire*

$$\nabla : \Gamma(TM) \to \Gamma(T^\star M \otimes E)$$

qui vérifie la condition de Leibnitz suivante

$$\forall \sigma \in \Gamma(E),\ \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), \quad \nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s$$

La connexion ∇ s'étend à tous les fibrés $A^p(E)$ en application K-linéaire

$$d^\nabla : A^p(E) \to A^{p+1}(E)$$

vérifiant pour tout tenseur décomposable

$$\forall \sigma \in \Gamma(A^p(E)),\ \forall \varphi \in \Gamma(\bigwedge^p T^\star(M)), \quad \nabla(\varphi \otimes s) = d\varphi \otimes s + (-1)^p \varphi \otimes \nabla s$$

Une connexion n'est pas un tenseur car n'est pas $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire à cause de la condition de Leibnitz, cependant la composée $d^\nabla \circ \nabla$ le devient

Proposition et Définition 5. 89 *On appelle courbure associée à la connexion ∇ la composée*

$$R = d^\nabla \circ \nabla : A^0(E) \to A^2(E).$$

Lorsque $E = TM$, on obtient une section de $\bigwedge^2 T^\star M \otimes T^\star M \otimes TM \simeq \bigwedge^2 T^\star M \otimes End(TM)$, en particulier un tenseur de type (3,1).

Démonstration : Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$d^\nabla \circ \nabla(f\sigma) = d^\nabla(df \otimes \sigma + f\nabla\sigma) = d^2 f \otimes \sigma - df \otimes \nabla\sigma + df \otimes \nabla\sigma + fd^\nabla \circ \nabla\sigma = fd^\nabla \circ \nabla\sigma.$$

5.4 Contractions, isomorphismes musicaux, traces

Soit $A = (A^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p})$ un tenseur de type (p,q), il est possible en utilisant le crochet de dualité d'obtenir un tenseur de type $(p-1,q-1)$ en contractant suivant n'importe quel indice covariant et n'importe quel indice contravariant. On note la contraction d'indices m (covariant) et n (contravariant),

$$[c^n_m(A)]^{j_1,\dots,j_{n-1},j_{n+1},\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_{m-1},i_{m+1},\dots,i_p} = A^{j_1,\dots,j_{n-1},l,j_{n+1},\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_{m-1},l,i_{m+1},\dots,i_p}.$$

Une autre convention vient du fait que la métrique g donne un isomorphisme entre TM et $T^\star M$. Pour tout $x \in M$,

$$\begin{array}{cccc} \flat: & T_xM & \to & T^\star_x M \\ & X_x & \mapsto & \big(Y_x \mapsto g(X_x, Y_x)\big) \end{array}$$

En identifiant de cette façon espace tangent et cotangent, le crochet de dualité devient le produit scalaire et une base orthonormale est envoyée sur la base duale. On obtient pour tous $p,q \geq 0$, avec la convention $T^{p,q} = 0$ si $p<0$ ou $q<0$ des **isomorphismes musicaux** :

$$\flat : T^{p,q} \to T^{p+1,q-1}, \quad \text{et} \quad \sharp : T^{p,q} \to T^{p-1,q+1}$$

inverses l'un de l'autre.

L'isomorphisme $\flat$ (resp. $\sharp$) remplace dans le produit tensoriel un facteur TM (resp. $T^\star M$) par un facteur $T^\star M$ (resp. TM), "on descend un indice" (resp. "on remonte un indice"). Du point de vue des calculs dans un système de coordonnées où le tenseur $A \in \Gamma(T^{p,q}M)$ s'écrit

$$A^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p},$$

$\flat A$ (resp. $\sharp A$) s'écrit

$$A^{j_2,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p,l} = g_{lk} A^{k,j_2,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}, \qquad \text{resp.} \quad A^{l,j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_{p-1}} = g^{lk} A^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_{p-1},k} \tag{1}$$

Une utilisation itérée de $\flat$ et $\sharp$ donne un isomorphisme

$$\sharp^p \circ \flat^q : T^{p,q}M \to T^{q,p}M$$

(remarquer qu'un changement de l'ordre des isomorphismes ne change pas la composée). En composant avec la **contraction** d'un espace avec son dual, on obtient une forme bilinéaire positive non dégénérée

$$g : T^{p,q}M \times T^{p,q}M \to \mathbb{R},$$

qui le reste par restriction aux sous-espaces, notamment $S^p(T^\star M)$ et $\Lambda^p M$ le sous-espace des tenseurs de type (p,0) respectivement symétriques ou antisymétriques. En coordonnées locales, la base formée des éléments $dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_p} \otimes \partial_{j_1} \otimes \cdots \partial_{j_q}$ est orthonormale. Puisque les bases sont duales, une contraction consiste à sommer de 1 à n un indice en haut et un indice en bas (le tenseur obtenu dépend du choix des espaces contractés en général). Si $K, L \in T^{p,q}M$, K et L ont pour composantes

$$K^{i_1\cdots i_q}_{j_1\cdots j_p} \quad \text{et} \quad L^{i_1\cdots i_q}_{j_1\cdots j_p},$$

dans la carte locale $x_1, \dots, x_n$ et

$$g(K,L) = g_{i_1k_1}\cdots g_{i_qk_q} g^{j_1l_1}\cdots g^{j_pl_p} K^{i_1\cdots i_q}_{j_1\cdots j_p} L^{k_1\cdots k_q}_{l_1\cdots l_p}. \tag{2}$$

Considérons $u_1, \dots, u_n$ un repère local orthonormé de $T^\star M$. Pour que l'inclusion $\Lambda^p M \subset \bigotimes^p T^\star M$ soit une isométrie, on identifie $u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p}$ avec

$$\frac{1}{(p\,!)^{1/2}} \sum_\sigma \epsilon(\sigma) u_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes u_{i_{\sigma(p)}}.$$

On vérifie que pour $x \in M$, $v_1, \dots, v_p, v'_1, \dots, v'_p \in T^\star_x$ on a

$$g(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p, v'_1 \wedge \cdots \wedge v'_p) = \det\left(g(v_j, v'_k)\right)_{1 \le j,k \le p}.$$

Par exemple, l'isomorphisme $\flat$ permet de construire

$$End(E) \to E^\star \otimes E \to E^\star \otimes E^\star \to \mathcal{L}^2(E, \mathbb{R})$$

Cet isomorphisme associe à $f \in End(E)$ la forme bilinéaire F définie par

$$F(x,y) = g(f(x), y).$$

La **trace** d'une forme bilinéaire est la trace de l'endomorphisme associé. Si $\{e_1, \dots, e_n\}$, est une base orthonormée de (E, g), la trace de F s'écrit

$$tr\,F = \sum_{i=1}^n g(f(e_i), e_i) = \sum_{i=1}^n F(e_i, e_i). \tag{3}$$

Si F a dans la base précédente la matrice (b_{ij}), on aura

$$tr\,F = g^{ij} b_{ij} = b^i_i.$$

Plus généralement, si $A = (A_{i_1,\dots,i_p})$ est un tenseur p-fois covariant, on peut prendre la **trace** suivant deux indices quelconques k et l. On remonte un indice en on contracte avec l'autre :

$$[tr_{kl} A]_{i_1,\dots,\widehat{i_k},\dots,\widehat{i_l},\dots,i_p} = g^{\alpha\beta} A_{i_1,\dots,i_{k-1},\alpha,i_{k+1},\dots,i_{l-1},\beta,i_{l+1},\dots,i_p}.$$

Exercice 5. 90 On note $T^{p,q}M$ le fibré des tenseurs de type (p,q). Ecrire explicitement dans des coordonnées locales l'isomorphisme

$$T^{0,1}M \times T^{0,1}M \to T^{0,1}M \times T^{1,0}M$$

suivi de la contraction et retrouver le produit scalaire.

6 Solution des exercices

Ex. 6 : L'application $F : (M_1 \otimes \cdots \otimes M_p) \times (M_{p+1} \otimes \cdots \otimes M_n) \to M_1 \otimes \cdots \otimes M_n$ définie sur un couple de tenseurs décomposables par

$$F(m_1 \otimes \cdots \otimes m_p, m_{p+1} \otimes \cdots \otimes m_n) = m_1 \otimes \cdots \otimes m_n$$

est bilinéaire. En effet, on a par exemple

$$\begin{aligned}
&F(m_1 \otimes \cdots \otimes m_p + m'_1 \otimes \cdots \otimes m'_p, m_{p+1} \otimes \cdots \otimes m_n) \\
&\qquad = (m_1 \otimes \cdots \otimes m_p + m'_1 \otimes \cdots \otimes m'_p) \otimes m_{p+1} \otimes \cdots \otimes m_n \\
&\qquad = m_1 \otimes \cdots \otimes m_p \otimes m_{p+1} \otimes \cdots \otimes m_n + m'_1 \otimes \cdots \otimes m'_p \otimes m_{p+1} \otimes \cdots \otimes m_n \\
&\qquad = F(m_1 \otimes \cdots \otimes m_p, m_{p+1} \otimes \cdots \otimes m_n) + F(m'_1 \otimes \cdots \otimes m'_p, m_{p+1} \otimes \cdots \otimes m_n)
\end{aligned}$$

$$F(am_1 \otimes \cdots \otimes m_p, m_{p+1} \otimes \cdots \otimes m_n) = am_1 \otimes \cdots \otimes m_p \otimes m_{p+1} \otimes \cdots \otimes m_n$$

$$= aF(m_1 \otimes \cdots \otimes m_p, m_{p+1} \otimes \cdots \otimes m_n).$$

On déduit le résultat de la propriété universelle du produit tensoriel.

Ex. 8 : L'application $U : M_1 \times \cdots \times M_n \to N_1 \times \cdots \times N_n$ définie par $U(x_1, \ldots, x_n) = u_1(x_1) \otimes \cdots \otimes u_n(x_n)$ est n-linéaire donc se factorise d'après la propriété universelle du produit tensoriel, à travers $M_1 \otimes \cdots \otimes M_n$, pour donner l'application linéaire $u_1 \otimes \cdots \otimes u_n$.

Ex. 12 : 1) Reprenons la construction du produit tensoriel $M \otimes N = P/Q$. Le tenseur $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ est la classe de $\sum_{i=1}^n \delta_{x_i y_i}$ modulo le sous-module Q engendré par les tenseurs de la forme $\delta_{m+m',n} - \delta_{mn} - \delta_{m'n}$, $\delta_{am,n} - a\delta_{mn}$, $\delta_{m,n+n'} - \delta_{mn} - \delta_{mn'}$, $\delta_{m,an} - a\delta_{mn}$, où $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ et $a \in A$. Puisque, $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = 0$ dans $M \otimes N$, il existe des tenseurs $t_j \in Q$, $j = 1, \ldots, p$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = \sum_{j=1}^p t_j$. Notons $m_1, \ldots, m_q \in M$ et $n_1, \ldots, n_r \in N$ les éléments de M (resp. N) qui interviennent dans les t_j. Alors si $M'' = \langle M', m_1, \ldots, m_q \rangle$, $N'' = \langle N', n_1, \ldots, n_r \rangle$, M'' et N'' sont de type fini et par construction $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = 0$ dans $M'' \otimes N''$.
2) Dans $2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $2n \otimes 1 \neq 0$ si n est impair, on doit donc prendre $M \otimes N$ qui est dans cet exemple de type fini.

Ex. 14 : C'est une conséquence immédiate de la distributivité du produit tensoriel sur la somme directe : $M_1 \otimes M_2 = (N_1 \otimes N_2) \oplus (N_1 \otimes P_2) \oplus (P_1 \otimes N_2) \oplus (P_1 \otimes P_2)$. L'application canonique $i_1 \otimes i_2$ est donc injective et $N_1 \otimes N_2$ a pour supplémentaire $N_1 \otimes P_2 \oplus P_1 \otimes N_2 \oplus P_1 \otimes P_2$.

Ex. 23 : Soit $\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}$ une famille finie de rationnels et $q = ppcm\{q_i \mid 1 \leq i \leq n\}$. En réduisant au même dénominateur on peut écrire cette famille $\frac{p'_1}{q}, \ldots, \frac{p'_n}{q}$. Alors $\frac{1}{2q} \notin \mathbb{Z}\frac{p'_1}{q} + \cdots + \mathbb{Z}\frac{p'_n}{q}$ et donc une famille finie ne peut pas engendrer tout $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Z}$.

Ex. 24 : 1) Soit (e_i) une base de F et soit l'application bilinéaire $f : N \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ définie par $f(\sum_i \alpha_i e_i, \bar{n}) = \sum_i \overline{\alpha_i n}$. L'application f n'est pas nulle puisque $f(e_j, \bar{1}) = \bar{1}$. Comme f se factorise par $F \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $F \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'est pas nul.
2) Il suffit de montrer que tout tenseur décomposable est nul, ce qui est le cas puisque

$$\frac{p}{q} \otimes \bar{n} = \frac{2p}{2q} \otimes \bar{n} = \frac{p}{2q} \otimes 2.\bar{n} = 0.$$

Ceci montre avec 1) que $\mathbb{Q}$ n'est pas un $\mathbb{Z}$-module libre.

Ex. 25 : 1) Soient $f : M \to N$ une application surjective et $g : L \to N$ une application linéaire où L est libre. On note $(e_i)_{i \in I}$ une base de L. Soient pour tout $i \in I$, $m_i \in M$ tel que $f(m_i) = g(e_i)$. On définit alors l'application linéaire $G : L \to M$ en posant $G(e_i) = m_i$. Par construction $f \circ G = g$.
2) $i) \Longleftrightarrow ii)$ L'application

$$\begin{array}{ccc} Hom(P, M) & \to & Hom(P, N) \\ G & \mapsto & f \circ G \end{array}$$

est surjective pour toute application f si et seulement si P est projectif.
$i) \Longrightarrow iii)$ Soit $L = A^{(P)}$, c'est un A module libre de base $(e_p)_{p \in P}$ et considérons l'application surjective

$$(*) \qquad \begin{array}{cccc} f : & A^{(P)} & \to & P \\ & \displaystyle\sum_{p \in P} a_p e_p & \mapsto & \displaystyle\sum_{p \in P} a_p p \end{array}$$

(remarquer que les sommes sont finies) de noyau $P'' := \operatorname{Ker} f$. Puisque P est projectif on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & & & P \arrow[dl, "G"'] \arrow[d, "Id"] & \\ 0 \arrow[r] & P' \arrow[r] & A^{(P)} \arrow[r, "f"] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

L'application G est injective : si $G(x) = 0$, $x = f \circ G(x) = 0$ donc P est isomorphe à $P' := G(P)$. Nous allons voir que $A^{(P)} = P' \oplus P''$. En effet si $x \in P' \cap P''$, alors $f(x) = 0$ et il existe $y \in P$ tel que $x = G(y)$, ce qui donne $y = 0$ donc $x = 0$. D'autre part, soit $y \in A^{(P)}$, $x = f(y)$ et $x' = G(x)$. Alors $f(y - x') = f\Big(y - G\big(f(y)\big)\Big) = 0$ donc il existe $x'' \in P''$ tel que $y = x' + x''$.

$iii) \Longrightarrow i)$ Soit $f : M \to N$ une application surjective et $g : P \to N$ linéaire. Puisqu'il existe L libre et P' tels que $L = P \oplus P'$, on prolonge g par 0 sur P' pour obtenir $\tilde{g} : L \to N$. Puisque d'après 1) L est projectif on a un relèvement $G : L \to M$ et $f \circ G_{|P} = \tilde{g}_{|P} = g$.

$ii) \Longrightarrow iv)$ Pour $N = P$ on a un morphisme surjectif

$$Hom(P, M) \to Hom(P, P), \quad G \mapsto u \circ G.$$

On en déduit que Id_P est dans l'image, c'est-à-dire il existe $v \in Hom(P, M)$ tel que $u \circ v = Id_P$.

$iv) \Longrightarrow iii)$ Considérons l'application linéaire surjective $(*)$ $u : A^{(P)} \to P$. On vérifie comme précédemment que $A^{(P)} = \operatorname{Im} v \oplus \operatorname{Ker} u$. Comme P est isomorphe à $\operatorname{Im} v$, on a le résultat.

3) $\mathbb{Q}$ n'est pas projectif : considérons l'application surjective

$$g : \mathbb{Z}^{(N^\star)} \to \mathbb{Q}, \quad g\Big((n_k)_{k \in \mathbb{N}^\star}\Big) \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}^\star} \frac{n_k}{k}.$$

Si g admet une section $s : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}^{(N^\star)}$ alors on doit avoir pour tout tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $s(1) = ns(1/n)$, d'où $s(1/n) = s(1)/n$ or les coordonnées de $s(1)$ sont des entiers fixés non tous nuls, donc pour n grand, $s(1/n) \notin \mathbb{Z}^{(N^\star)}$ ce qui est impossible. On en déduit d'après la condition $iv)$ que Q n'est pas projectif.

Ex. 29 : On a vu dans l'exercice 25 que M libre $\Longrightarrow$ M projectif. Soit M un module projectif : d'après le même exercice, il existe un module libre L et un sous-module $M' \subset L$ tels que $L = M \oplus M'$. Soit $f : N' \to N$ une application linéaire injective. Puisque tout module libre est plat,

$$\begin{pmatrix} f \otimes Id_M & 0 \\ 0 & f \otimes Id_{M'} \end{pmatrix} : (N' \otimes M) \oplus (N' \otimes M') \simeq N' \otimes L \stackrel{f \otimes Id_L}{\longrightarrow} N \otimes L \simeq (N \otimes M) \oplus (N \otimes M')$$

est injective, en particulier $f \otimes Id_M$ est injective ce qui montre que M est plat.

Ex. 32 : L'application $f : N_A \times B \to N$, définie $f(n, b) = bn$ est A-bilinéaire, donc on a une application A-linéaire $\varphi : N_A \otimes_A B \to N$, $\varphi(n \otimes b) = bn$. De plus φ est B-linéaire car $\varphi(b'.n \otimes b) = \varphi(n \otimes b'b) = (b'b)n = b'(bn) = b'\varphi(n \otimes b)$. D'autre part, on a une application B-linéaire, $\psi : N \to N_A \otimes_A B$ définie par $\psi(n) = n \otimes 1_B$ pour laquelle $\psi(bn) = n \otimes b$. On a d'une part, $\psi \circ \varphi(n \otimes b) = \psi(bn) = bn \otimes 1_B = n \otimes b$; d'autre part, $\varphi \circ \psi(n) = \varphi(n \otimes 1_B) = 1_B n = n$, donc les applications sont inverses l'une de l'autres et on a un isomorphisme.

Ex. 33 : Soit N un B-module et notons N_A le A-module obtenu par restriction des scalaires. Les groupes N et N_A sont égaux, seule change la multiplication par les scalaires. Par exemple si N est le $\mathbb{R}$-module $\mathbb{R}^n$ et $A = \mathbb{Z} \to \mathbb{R} = B$ est l'application canonique, $N = N_A = \mathbb{R}^n$. Soit $f : N' \to N$ est un morphisme injectif de B-modules, le morphisme induit $f_A : N'_A \to N_A$ reste injectif et puisque M est A-plat, $f_A \otimes Id_M : N'_A \otimes_A M \to N_A \otimes_A M$ est injectif ainsi que $f \otimes Id_M : N' \otimes_A M \to N \otimes_A M$ qui est maintenant une application B-linéaire entre B-modules. On en déduit que la composée

$$N' \otimes_B M_B = N' \otimes_B (M \otimes_A B) \overset{\varphi'}{\simeq} N' \otimes_A M \overset{f\otimes Id_M}{\longrightarrow} N \otimes_A M \overset{\varphi}{\simeq} N \otimes_B (M \otimes_A B) \simeq N \otimes M_B$$

est injective, où par exemple l'isomorphisme de B-modules φ est défini par $\varphi(n \otimes m) = n \otimes (m \otimes 1_B)$.

Ex. 37 : Soit $p = pgcd(m, n)$; l'application bilinéaire

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \quad (\bar{\alpha}, \tilde{\beta}) \mapsto [\alpha\beta]$$

est bien définie. En effet si $\alpha' = \alpha + m\gamma$ et $\beta' = \beta + n\delta$,

$$[\alpha'\beta'] = [\alpha\beta + n\alpha\delta + m\beta\gamma + mn\delta] = [\alpha\beta].$$

D'après la propriété universelle du produit tensoriel on en déduit une application $\mathbb{Z}$-linéaire

$$\varphi : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \quad \bar{\alpha} \otimes \tilde{\beta} \mapsto [\alpha\beta]$$

Cette application est évidemment surjective puisque $[\gamma] = \varphi(\bar{\gamma} \otimes \tilde{1})$. Elle est injective : en effet remarquons tout d'abord que tout tenseur est décomposable

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{\alpha}_i \otimes \tilde{\beta}_i = \sum_{i=1}^{N} \overline{\alpha_i\beta_i} \otimes \tilde{1} = \left(\sum_{i=1}^{N} \overline{\alpha_i\beta_i}\right) \otimes \tilde{1}.$$

Enfin si $\bar{\alpha} \otimes \tilde{\beta} = \overline{\alpha\beta} \otimes \tilde{1} \in \operatorname{Ker}\varphi$, alors $[\alpha\beta] = 0$ c'est-à-dire il existe γ tel que $\alpha\beta = p\gamma$. D'après le lemme de Bezout, il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $p = am + bn$. On en déduit $\alpha\beta = ma\gamma + nb\gamma$ et

$$\overline{\alpha\beta} \otimes \tilde{1} = \overline{(ma\gamma + nb\gamma)} \otimes \tilde{1} = \overline{ma\gamma} \otimes \tilde{1} + \bar{1} \otimes \widetilde{nb\gamma} = 0.$$

Ex. 39 : Soit $(a, b) \in A \times A^\star$. Si A est un corps, $(a, b) \sim (ab^{-1}, 1)$, donc l'application $A \to K_A$, $a \to a/1$ est surjective. Comme tout morphisme entre deux corps est injectif, c'est un isomorphisme.

Ex. 40 : L'application A-linéaire $i_M : M \to M_K$ n'est pas injective en général. Soit $A = \mathbb{Z}$ et $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Puisque pour tous $a, a' \in \mathbb{Z}^\star$ et tous $m, m' \in M$, $n(am' - a'm) = 0$, $M_K = 0$. L'application K-linéaire $j : K \otimes_A M \to M_K$ vérifiant $j(\frac{a}{b} \otimes m) = \frac{am}{b}$ a pour application inverse $\varphi : M_K \to K \otimes_A M$, $\varphi(\frac{m}{a}) = \frac{1}{a} \otimes m$. L'application φ est K-linéaire car

$$\varphi\Big(\frac{b}{c}\ \frac{m}{a}\Big) = \varphi\Big(\frac{bm}{ac}\Big) = \frac{1}{ac} \otimes bm = \frac{b}{ca} \otimes m = \frac{b}{c}\frac{1}{a} \otimes m = \frac{b}{c}\ \varphi\Big(\frac{m}{a}\Big)$$

et on vérifie par exemple $\varphi \circ j(\frac{a}{b} \otimes m) = \varphi(\frac{am}{b}) = \frac{1}{b} \otimes am = \frac{a}{b} \otimes m$.

Ex. 42 : Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Q}$ est plat comme tous les corps de fractions, par contre considérons l'application $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $z \mapsto nz$. Alors l'application

$$f \otimes Id_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

n'est pas injective puisque

$$f \otimes Id_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}(1 \otimes \overline{1/n}) = n \otimes \overline{1/n} = 1 \otimes \bar{1} = 0.$$

Ex. 46 : 1) Le K-espace vectoriel $K[X]$ a pour base $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc $K[X] \otimes K[Y]$ a pour base $(X^p \otimes Y^q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$. Par ailleurs $K[X,Y]$ a pour base $(X^pY^q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$, on a donc un isomorphisme $\varphi : K[X] \otimes K[Y] \to K[X,Y]$ défini par $\varphi(X^p \otimes Y^q) = X^pY^q$ pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.
2) L'existence de l'application $\varphi : K(X) \otimes K(Y) \to K(X,Y)$ résulte immédiatement de la propriété universelle du produit tensoriel de deux K-algèbres.
3) Soit $T = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{R_i} \otimes \frac{B_i}{S_i} \in K(X) \otimes K(Y)$. Pour

$$F = ppcm\{R_i \mid i = 1, \ldots, n\} \in K[X], \quad G = ppcm\{S_i \mid i = 1, \ldots, n\} \in K[Y],$$

on obtient la forme voulue.
4) Soit, d'après 3),

$$T' = \varphi(T) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \frac{P_i(X)}{F(X)} \otimes \frac{Q_i(Y)}{G(Y)}\right) \in \operatorname{Im}\varphi.$$

Comme φ est aussi un morphisme de $K(X)$ et de $K(Y)$ algèbres,

$$\begin{aligned} F(X)G(Y)T'(X,Y) &= \varphi\Big(F(X)G(Y)\sum_{i=1}^n \frac{P_i(X)}{F(X)} \otimes \frac{Q_i(Y)}{G(Y)}\Big) \\ &= \varphi\Big(\sum_{i=1}^n P_i(X) \otimes Q_i(Y)\Big) = \sum_{i=1}^n P_i(X)Q_i(Y) \in K[X,Y]. \end{aligned}$$

5) Si $\frac{1}{X+Y}$ était dans l'image de φ, on aurait d'après 4) des polynômes $F \in K[X]$, $G \in K[Y]$ et $H \in K[X,Y]$ tels que

$$F(X)G(Y) = (X+Y)H(X,Y).$$

Comme les anneaux sont factoriels et $X+Y$ est irréductible, $X+Y$ devrait diviser F ou G, ce qui est impossible. Supposons maintenant qu'il existe un isomorphisme $\alpha : K(X,Y) \to K(X)\otimes K(Y)$ qui envoie X (resp. Y) sur $X\otimes 1$ (resp. $1\otimes Y$). Alors par composition on aurait $\alpha\circ\varphi : K(X)\otimes K(Y) \to K(X)\otimes K(Y)$ tel que $\alpha\circ\varphi(X\otimes 1) = X\otimes 1$ et $\alpha\circ\varphi(1\otimes Y) = 1\otimes Y$, donc $\alpha \circ \varphi = Id$, ce qui est impossible puisque φ n'est pas surjectif.

Ex. 47 : Puisque pour tout A-module M on a $A/I \otimes_A M \simeq M/IM$, l'application canonique $N \otimes A/I \to M \otimes A/I$ est injective si et seulement si $N/IN \to M/IM$ est injective si et seulement si $\operatorname{Ker}(N \to M/IM) = N \cap IM$.

Ex. 48 : L'application $(u,b) \mapsto bu\otimes Id_B$ de $Hom_A(M,N)\times B$ dans $Hom_B(M\otimes_A B, N\otimes_A B)$ est bilinéaire, ce qui donne ψ d'après la propriété universelle du produit tensoriel. Supposons M isomorphe à A^n. Rappelons l'isomorphisme $Hom_A(A^n,N) \simeq N^n$ qui envoit une application linéaire sur la famille des images des vecteurs de base. Alors, on a les isomorphismes

$$Hom_A(M,N) \otimes_A B \simeq Hom_A(A^n,N) \otimes_A B \simeq N^n \otimes_A B \simeq (\bigoplus^n N) \otimes B \simeq (N \otimes_A B)^n,$$

et

$$\begin{aligned} Hom_B(M \otimes_A B, N \otimes_A B) &\simeq Hom_B(A^n \otimes_A B, N \otimes_A B) \simeq Hom_B(B^n, N \otimes_A B) \\ &\simeq (N \otimes_A B)^n, \end{aligned}$$

qui transforment ψ en l'identité.
Pour $A = N = \mathbb{Z}$, $B = M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on a $Hom_A(M,N) \otimes_A B = 0$ car $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$, mais $Hom_B(M \otimes B, N \otimes B) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ car $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Ex. 51 : S'il existe $v \in End_{\mathbb{R}}(E)$ tel que $u = v \otimes Id_{\mathbb{C}}$, on a

$$\sigma_E \circ u = (Id_E \otimes \sigma) \circ (v \otimes Id_{\mathbb{C}}) = v \otimes \sigma = (v \otimes Id_{\mathbb{C}}) \circ (Id_E \otimes \sigma) = u \circ \sigma_E.$$

Réciproquement, on a la décomposition $E_{\mathbb{C}} = E \oplus iE$ où E (resp. iE) est l'espace propre de σ_E associé à la valeur propre 1 (resp. -1). Posons

$$v = \begin{pmatrix} v' \\ v'' \end{pmatrix} = u_{|E} : E \to E_{\mathbb{C}} = E \oplus iE.$$

Alors si $\sigma_E \circ u = u \circ \sigma_E$, on a par restriction à E,

$$\begin{pmatrix} v' \\ -v'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id_E & 0 \\ 0 & -Id_{iE} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v' \\ v'' \end{pmatrix} = \sigma_E \circ v = u \circ \sigma_{E|E} = u_{|E} = v = \begin{pmatrix} v' \\ v'' \end{pmatrix},$$

donc $v'' = 0$ et $v \in End_{\mathbb{R}}(E)$. Enfin, puisque $\sigma_E : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ est une involution, la condition $u = v \otimes Id_{\mathbb{C}}$ est équivalente à $u \circ \sigma_E = v \otimes Id_{\mathbb{C}} \circ \sigma_E$, ce qui est vrai puisque chaque terme de l'égalité est égal à $v \otimes \sigma$.

Ex. 52 : 1) On note $E_\sigma(\pm 1)$ l'espace propre de σ associé à la valeur propre ± 1. Soit $y \in E_{\mathbb{R}}$; alors

$$y = \frac{1}{2}(y + \sigma(y)) + \frac{1}{2}(y - \sigma(y)) \in E_\sigma(1) \oplus E_\sigma(-1).$$

Or $F = E_\sigma(1)$ et $\sigma(i(F)) = -i(\sigma(F)) = -i(F)$ donc $i(F) = E_\sigma(-1)$ et

$$E_{\mathbb{R}} = F \oplus i(F).$$

On en déduit que $\dim_{\mathbb{R}} F = \dim_{\mathbb{C}} E$ et $E = F \otimes \mathbb{C}$.
2) Soit $G \subset E_{\mathbb{R}}$ un sous-espace vectoriel. On a une application canonique

$$\alpha_G : G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to E, \quad x \otimes \lambda \mapsto \lambda x.$$

Si $G \subset E_\sigma(1) = F$, alors $G \cap i(G) \subset F \cap iF = 0$ d'après 1). Soit $\sum_j x_j \otimes \lambda_j \in \operatorname{Ker} \alpha_G$ alors $\sum_j \lambda_j x_j = 0$. On note $\lambda_j = a_j + ib_j$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, d'où

$$\sum_j a_j x_j = -i \sum_j b_j x_j \in G \cap iG = 0$$

i.e. $\operatorname{Ker} \alpha_G = 0$.
Réciproquement, supposons $\alpha_G : G \otimes \mathbb{C} \to E$ injective, alors $\dim_{\mathbb{R}} G \leq \dim_{\mathbb{C}} E$. La structure complexe de E permet de définir $i : E_{\mathbb{R}} \to E_{\mathbb{R}}$. On a

$$G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq G \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{R} + i\mathbb{R}) \simeq G \oplus iG$$

où la somme directe est *externe*. Si α_G est injective alors dans $E_{\mathbb{R}}$, $G \cap iG = 0$ et on a une somme directe $G \oplus iG$ *interne*. Soit F un sous-espace réel maximal pour cette propriété et contenant G, alors $F \cap iF = 0$. On doit avoir $\dim_{\mathbb{R}} F = \dim_{\mathbb{C}} E$. En effet $F \otimes \mathbb{C} = F \oplus iF$ est de dimension réelle paire et c'est un sous-espace complexe. Considérons un supplémentaire complexe H. Si $H \neq 0$, on a une droite complexe de H, donc une droite réelle $L \subset H_{\mathbb{R}}$ telle que $L \cap iL = 0$. Alors $F \oplus L \cap i(F \oplus L) = 0$ ce qui contredirait la maximalité de F. Il reste à définir $\sigma : F \oplus iF \to F \oplus iF$, $\sigma(x + iy) = x - iy$.

Ex. 57 : Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $j_p \circ u^{\otimes p} : M^{\otimes p} \to \bigotimes N = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} N^{\otimes n}$. D'après la propriété universelle de la somme directe il existe une unique application linéaire, notée $\otimes u$ telle que

$$j_p \circ u^{\otimes p} = \otimes u \circ i_p : M^{\otimes p} \to \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} N^{\otimes n} = \bigotimes N$$

Pour vérifier l'égalité des deux applications linéaires, il suffit de la vérifier sur l'un des facteurs de la somme directe, disons $M^{\otimes p}$ et par linéarité de la vérifier sur un tenseur décomposable :

$$\begin{aligned}(\otimes u) \circ (\textstyle\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} i_n)(m_1 \otimes \cdots \otimes m_p) &= (\otimes u) \circ i_p(m_1 \otimes \cdots \otimes m_p) = j_p \circ u^{\otimes p}(m_1 \otimes \cdots \otimes m_p) \\ &= \textstyle\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} (j_n \circ u^{\otimes n})(m_1 \otimes \cdots \otimes m_p)\end{aligned}$$

Ex. 70 : 1) Pour tout p on a une application linéaire $j_p \circ \bigwedge^p u : \bigwedge^p M \to \bigwedge N$. La propriété universelle de la somme directe donne une application

$$\bigwedge u : \bigwedge M = \bigoplus_n \bigwedge^n M \to \bigwedge N$$

telle que $\bigwedge u \circ i_p = j_p \circ \bigwedge^p u$.
Il suffit de vérifier l'égalité sur un multivecteur décomposable $m_1 \wedge \cdots \wedge m_p$

$$\begin{aligned}\bigwedge u \circ \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} i_n(m_1 \wedge \cdots \wedge m_p) &= \bigwedge u \circ i_p(m_1 \wedge \cdots \wedge m_p) = j_p \circ \bigwedge^p u(m_1 \wedge \cdots \wedge m_p) \\ &= \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} (j_n \circ \bigwedge^n u)(m_1 \wedge \cdots \wedge m_p).\end{aligned}$$

2) On considère l'application n-linéaire alternée

$$h : M^n \to \bigwedge^n P, \quad (m_1, \ldots, m_n) \mapsto v \circ u(m_1) \wedge \cdots \wedge v \circ u(m_n)$$

et soit $\Phi_n : M^n \to \bigwedge^n M$ l'application canonique. Alors d'après la propriété universelle de $(\Phi_n, \bigwedge^n M)$ il existe une unique application linéaire $H : \bigwedge^n M \to \bigwedge^n P$ telle que $H \circ \Phi_n = h$. D'une part par construction $\bigwedge^n (v \circ u) \circ \Phi_n = h$; d'autre part, notons

$$U : M^n \to N^n, \quad U(m_1, \ldots, m_n) = \big(u(m_1), \ldots, u(m_n)\big)$$

et

$$g : N^n \to \bigwedge^n P, \quad g(b_1, \ldots, b_n) = v(b_1) \wedge \cdots v(b_n).$$

Alors $g \circ U = h$. Soit $\Psi_n : N^n \to \bigwedge^n N$ l'application canonique. D'après la propriété universelle de $(\Psi, \bigwedge^n N)$, $g = \bigwedge^n v \circ \Psi_n$. De plus, $\Psi_n \circ U$ est n-linéaire alternée, il existe donc d'après la propriété universelle de $(\Phi_n, \bigwedge^n M)$ une factorisation $\Psi_n \circ U = \bigwedge^n u \circ \Phi_n$. Finalement

$$h = g \circ U = (\bigwedge^n v \circ \Psi_n) \circ U = \bigwedge^n v \circ (\Psi_n \circ U) = \bigwedge^n v \circ \bigwedge^n u \circ \Phi_n$$

On a donc deux factorisations ; grâce à l'unicité,

$$\bigwedge^n (v \circ u) = \bigwedge^n v \circ \bigwedge^n u.$$

Ex. 83 : Le crocher de dualité ne dépend pas du choix de la carte puisqu'on a pour tous $i, j \in I$ tels que $U_{ij} \neq \emptyset$,

$$\begin{tikzcd}
U_{ij} \times \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^\star \arrow[rr, "G_{ij}"] \arrow[dr] & & U_{ji} \times \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^\star \arrow[dl] \\
& U_{ij} \times \mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(x, \lambda, a) \arrow[r, "G_{ij}"] \arrow[dr] & \Big(x, g_{ij}(x).\lambda,\ {}^t g_{ij}(x)^{-1}(a)\Big) \arrow[d] \\
& (x, \langle \lambda, a\rangle) = \Big(x, \langle g_{ij}(x).\lambda,\ {}^t g_{ij}(x)^{-1}(a)\rangle\Big)
\end{tikzcd}$$

Ex. 90 : En coordonnées locales munies de bases orthonormées

$$\begin{array}{ccccc}
T^{0,1} \times T^{0,1} & \to & T^{0,1} \times T^{1,0} & \to & T^{0,0} = \mathbb{R} \\
(K, L) = (K^i, L^j) & \mapsto & (K^i, g_{kj} L^j) & \mapsto & g_{ij} K^i L^j = g(K, L)
\end{array}$$

Références

[1] M. Artin : Algebra, *Prentice Hall (1991).*

[2] M.F. Atiyah & I.G. Macdonald : Introduction to Commutative Algebra, *Addison-Wesley (1969).*

[3] J.E. & M.J. Bertin : Algèbre linéaire et géométrie classique, *Masson (1981).*

[4] R. Elkik : Cours d'algèbre, *Ellipses (2002).*